Architectural Institute of Japan

U.D.C. 624.014.5 : 539.4

日本建築学会論文報告集
第227号・昭和50年1月

鋼構造骨組の三次元非線形解析†

正会員 藤本盛久* 正会員 和田 章**
同 岩田 衛*** 同 中谷文俊***

1. 序

1950年代後半に発表された有限要素法，マトリックス変位法は，現在，幾何学的非線形問題，材料非線形問題をも取扱うことが可能になりつつある。この非線形有限要素法を三次元まで拡張し，且つ，解析を行う際に必要な材料の性質等の諸条件が何らかの形で仮定することができるならば，ほとんどの問題はこの三次元非線形有限要素法で解析することが可能なはずである。しかし，現実にこの解析法を行うのには，非常に容量の大きなコンピュータと厖大な費用がかかる。

三次元的に扱わなくとも，いわゆる，Plane Stress，Plane Strain としてモデル化された問題などは，二次元の考え方で，三次元体として解析された結果と何ら異ならないものを得ている。さらに，板を組立ててできたとみなせる鋼構造骨組の部材は，板厚方向の応力を0，断面の形状は変化しないものと仮定すると，部材の変形，応力，歪等はすべて材軸方向だけの関数で表わすことができ，いわゆる，線材理論として扱うことができる。鋼構造骨組の場合，この構造物が持っている形の特徴を生かせば，無限に大きなコンピュータを用いなくとも，上記の仮定が成り立つ範囲においてではあるが，各種の非線形問題を数値解析することが可能である。

ところで，鋼構造骨組，特に薄肉断面構造の三次元非線形解析に関する研究は主に，梁の横座屈の解析，二軸曲げモーメントを受ける柱の挙動等，部材の解析を中心として近年発展を続けている[2),3),7),9)]。

しかし，これらの成果を利用した立場から骨組全体の挙動を厳密に解析する研究はあまり行われてなく，塑性流れ理論に基いた Yield hinge 法を用い，平面骨組，立体骨組の解析を行ったものがある程度である[1)]。

著者等は先の論文[6)]において，繰返し荷重を受ける筋違付鉄骨骨組の解析を行い，実験結果と比較検討することにより，例えば一つの圧縮材である筋違の挙動について，それのみを骨組から取り出し単材で扱うときと，骨組の中に組み込まれているときの挙動の違いについて等，いくつかの問題点を明らかにした。

本論文では，例えばK型筋違の面外座屈に関して梁の捩れ抵抗を非線形の範囲で評価する等，骨組の三次元的な非線形挙動を解析的に適格に把握することを目的とするため，先に述べた平面骨組に対する解析法を三次元骨組全体の挙動を解析し得るように拡張し，三次元の骨組の解析をやはり部材の解析と同程度の精度で行うものである。

さらに，我国の建築構造物のように，重力に対する抵抗より水平方向の繰返し力を大きく問題としているものは他には少なく，土木の分野，外国の研究等を調べても一方向載荷に対する終局耐力，終局の安定性の問題を扱っているものは数多くあるが，繰返し荷重，歪の戻り現象等を考慮した研究は少ない。それゆえ，先に述べた平面骨組を解析する際に，繰返し荷重，初期たわみ，歪の戻り現象等の外的，内的な条件をできる限り考慮したが，これらの条件，現象を本論文においても考慮し，三次元の問題へ適応し得るように拡張した。

本論文では解析法について詳細に説明した後，三つの例題を選び，実験結果および他の解析法によって求められた結果と比較する。

これらの結果より，鋼構造骨組の部材である柱，梁，筋違等の個々の挙動，それらが組み合わされた骨組としての非線形挙動について等，各種の問題を解析的に追求することが可能になったことを示す。

2. 解析上の仮定と構造物のモデル化

本解析を行うにあたって仮定した事項を以下に示す。

（1） 一つの要素内では断面の形は一様なものを扱う。

（2） 三次元的な広がりをもつ部材を線材と考える。このとき，材軸に平行な断面内の任意の点を通る要素の座標 x の関数として，部材断面の中の基本となる状態量が表わされる。すべての断面内の状態量は，この状態量に従属し，x 軸に垂直な断面内にある互いに直交した任意の軸 y, z によって表わされる(注-1)。

（3） 部材の断面の局部的な変形は無視する(注-2)。

（4） 一つの骨組部材は 5～20 個の要素に分割する (Fig. 1)。つまり，降伏域の進行，大変形によっ

† 研究概要について文献 (10) に発表
* 東京工業大学教授 工博
** 日建設計東京本社コンピュータ部
*** 東京工業大学大学院
(昭和49年7月5日本稿受理・討論期限昭和50年4月末日)

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

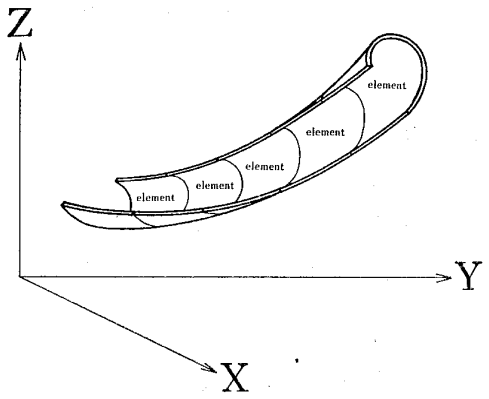


Fig. 1 Global coordinates and element

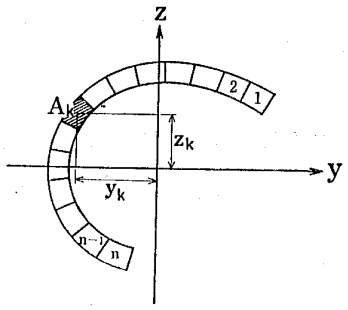


Fig. 2 Arbitrary cross section

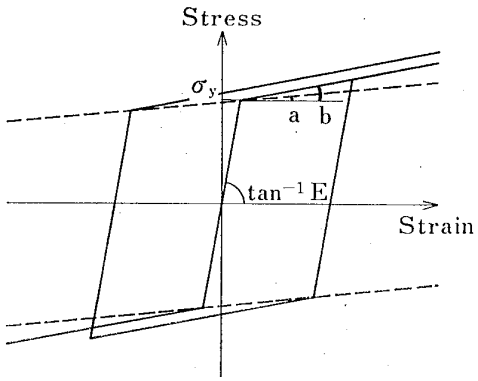


Fig. 3 Stress-strain relationships

て部材の中の状態は複雑なものとなり，連続な一つの関数では少々高次の関数を用いても正しく表現できない。それよりも，一部材の中に 5～20 個の要素をとり，その要素ごとに独立な関数を用い，各要素の間で変位と回転の連続はまもるが，それ以上の微分項（歪，曲率等）の連続はまもらないとする方が，かえって複雑な状態を表現するときの追随性がよいと考えられるからである。ただし，分割された各要素の座標系は各々の要素の変形後の節点を通る直線座標系を用いるため，部材の曲線的な変形に完全には追随しない。

（5） 各要素の変形は，材軸方向の変形，二軸方向の曲げ変形，断面のそり変形，サンブナンの捩れを含んだ材軸まわりの捩れ変形を考慮している。

（6） 部材の曲げにともなう剪断変形は無視できるものとする。

（7） 断面の弾性，塑性状態にかかわらず，二軸方向の曲げに関して，断面は平面を保持すると仮定する。そり関数についても同様に考え，弾性，塑性状態にかかわらず，断面形に応じて一つの関数 $\omega(y, z)$ を用いる。

（8） 適用できる断面形状は薄肉開断面，閉断面その他任意である。各断面は数十の単位の面に分割し (Fig. 2)，その各々の単位となる面について σ_x, ε_x を考える。

（9） 断面の降伏現象は，材軸方向の歪 ε_x と応力 σ_x のみによって評価し，剪断応力の影響は無視する。ε_x と σ_x の関係は Fig. 3 に示すものを用いる。本解析法は繰返し載荷の解析を目的の一つとしているとともに，単調載荷においても生じる歪の戻りを考慮するためにも，Fig. 3 の応力—歪関係を正しく追跡することに最大の注意をはらっている[6]。

(10) 要素内の応力，歪状態は各要素の両端の断面についてのみ追跡し，要素内部の応力，歪状態の追跡は行っていない。ただし，歪エネルギーを計算する際には，内部の応力状態が必要であるが，これは両端における応力を用いて線形補間する[6]。

(11) サンブナンの捩れに関しては常に弾性を保つものとする。

(12) 各骨組部材は，節点に直接剛に接続しているとする(注-3)。

(13) 部材端部のそりの拘束条件は，完全拘束または完全自由とする(注-3)。

3. 解析方法

本論文で用いる非線形解析法は，ポテンシャルエネルギー増分(注-4)の停留原理に基づいた，初期応力法とも呼ばれる増分法である。以下に，一連の展開をするように，変位増分の二次形式によって表わされた歪エネルギー増分と，外力を受けている部分が変位することによって失う外力のポテンシャルエネルギーの差としてのポテンシャルエネルギー増分を考える。さらに，二次形式の変分原理を応用することによって増分形の方程式を導き，Step by step 法と Iteration 法によって解いていく方法である(注-5)。

一つの要素 e に貯えられる歪エネルギー増分 $\Delta_e U$ は，4章以下に説明するように，要素の座標系における変位増分の二次形式で (1) 式のごとく表現することができる。

$$\Delta_e U = \frac{1}{2} \cdot \Delta_e \boldsymbol{u}^T \cdot {}_e\boldsymbol{K} \cdot \Delta_e \boldsymbol{u} + \Delta_e \boldsymbol{u}^T \cdot {}_e\boldsymbol{f}_{\text{in}} \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし，

$\Delta_e \boldsymbol{u}$：要素の座標系における節点変位増分

${}_e\boldsymbol{K}$：4章で求められる要素の剛性マトリックス

${}_e\boldsymbol{f}_{\text{in}}$：4章で求められる増分計算前の内部応力に釣合う要素の節点内力ベクトル

要素 e の要素の座標系における変位増分 $\Delta_e \boldsymbol{u}$ は，4章で説明する要素の位置に関係する線形な変換 ${}_e\boldsymbol{L}$ により，全構造体の絶対座標系における変位増分 $\Delta \boldsymbol{u}$ を用いて，(2) 式で表わすことができる。

$$\Delta_e \boldsymbol{u} = {}_e\boldsymbol{L} \cdot \Delta \boldsymbol{u} \quad \cdots\cdots(2)$$

(2) 式の変換を考慮しながら，各要素の貯える歪エネルギーの総和をとることによって，全構造体が貯える歪エネルギー増分 ΔU が求められる。

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

$$\Delta U=\sum_e \Delta_e U=\frac{1}{2}\cdot\Delta\boldsymbol{u}^T\cdot\boldsymbol{K}\cdot\Delta\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u}^T\cdot\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}\quad\cdots(3)$$

ただし，

$$\boldsymbol{K}=\sum_e {}_e\boldsymbol{L}^T\cdot{}_e\boldsymbol{K}\cdot{}_e\boldsymbol{L}\quad\cdots(4)$$

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}=\sum_e {}_e\boldsymbol{L}^T\cdot{}_e\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}\quad\cdots(5)$$

ただし，$\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}$ は本論文で考慮している非線形性をすべて無視したならば，その増分計算時に与えた外力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ex}}$ と，本来，釣合うべき節点内力ベクトル，である。

一方，外力のポテンシャルエネルギー増分 ΔW_{ex} は (6) 式で表わされる。

$$\Delta W_{\mathrm{ex}}=\Delta\boldsymbol{u}^T\cdot\boldsymbol{f}_{\mathrm{ex}}\quad\cdots(6)$$

ただし，$\boldsymbol{f}_{\mathrm{ex}}$ は増分外力を含む全節点外力ベクトルである。

変位増分 $\Delta\boldsymbol{u}$ が生じた後のポテンシャルエネルギー増分 $\Delta\Pi$ は (7) 式のように $\Delta\boldsymbol{u}$ の二次形式で表現することができる。

$$\Delta\Pi=\Delta U-\Delta W_{\mathrm{ex}}=\frac{1}{2}\cdot\Delta\boldsymbol{u}^T\cdot\boldsymbol{K}\cdot\Delta\boldsymbol{u}^T+\Delta\boldsymbol{u}^T f_{\mathrm{in}}-\Delta\boldsymbol{u}^T\cdot\boldsymbol{f}_{\mathrm{ex}}\quad\cdots(7)$$

(7) 式を二次形式の変分原理を用い，任意の $\delta\Delta\boldsymbol{u}$ に対して $\delta\Delta\Pi=0$ とおくと，(8) 式を得る。

$$\boldsymbol{K}\cdot\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{ex}}=0\quad\cdots(8)$$

(8) 式を用いて，増分間を線形に置き換えながら $\Delta\boldsymbol{u}$ を求める。この $\Delta\boldsymbol{u}$ が求められた後，$\Delta\boldsymbol{u}$ によって構造体に生じる歪増分を増分前の各要素の座標系において計算し，応力もそれらの歪増分に応じて修正する。これらの処理がすべての要素にわたって終了した後，各要素を修正された歪と応力を保持したまま，要素の軸方向の回転も考慮して，各要素の形としてのたわみ，そり等を取り去った直線要素として変形後の位置へ移動し，式の誘導においては曲線座標を用いない。

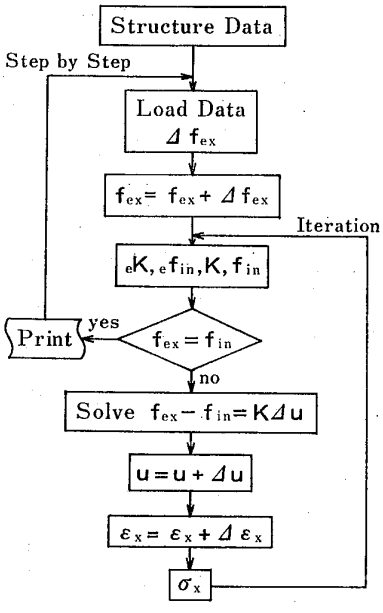


Fig. 4 Block chart of the present analysis

上記の処理によって，計算を 1 Step 進ませることができるが，$\Delta\boldsymbol{u}$ だけ変形が進んだ状態では降伏域の進行，要素の位置の変化および回転等により，内力（変位増分後の応力，座標により計算した $\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}$）と外力（$\boldsymbol{f}_{\mathrm{ex}}$）とは必らずしも釣合っていない。従って，内力と外力が釣合うまで何度も繰返して計算する Iteration が必要である。

以上の流れをブロックチャートにしたものを Fig. 4 に示す。この中で，Iteration をしながら $\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{ex}}$ を調べている部分があるが，本論文の計算を行う際には $(\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{ex}},\ \boldsymbol{f}_{\mathrm{in}}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{ex}})/(\boldsymbol{f}_{\mathrm{in}},\ \boldsymbol{f}_{\mathrm{in}})\leqq 10^{-9}$ をもって，等しくなったとしている。ただし，場合によっては 10^{-9} 以下の条件を満たすまで繰返し計算をすると，繰返し数が 10 回，20 回と多くなることがあるので，10^{-5} 程度まで条件をゆるめた箇所もある。

4. 剛性マトリックスと内力ベクトル

4.1 要素の座標の設定

前章にも述べたように，本解析法は各 Step および各 Iteration の計算を行うごとに，要素内の変形をすべて取り去り，要素は両端の節点間に直線的に位置されるものとし，前の状態までの変形は要素間の節点において配慮される。各要素の断面の主軸の向きは，その要素の両端の断面の主軸の向きの平均値として方向が定められる。この立場から，各要素の変形に応じて，各々独立に移動する要素の座標系を次のように定義することができる。

要素両端の断面の同じ点を通り，原点を要素の中央に置いた軸として x 軸を定める。x 軸に直交する中央の断面内に，右手系によって定める二つの軸を y 軸，z 軸とする。

4.2 要素内部の変位増分

4.1 で定義した要素の座標 x, y, z 軸に対応した方向の変位増分をそれぞれ $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ とし，軸方向の回転の増分を $\Delta\varphi$ とする。要素内部の断面上の任意点 (x, y, z) の x, y, z 方向および回転の変位増分 $(\Delta\bar{u}, \Delta\bar{v}, \Delta\bar{w}, \Delta\bar{\varphi})$ は次のようになる。

$$\Delta\bar{u}=\Delta u-(y-z\cdot\Delta\varphi)\cdot\frac{d\Delta v}{dx}-(z+y\cdot\Delta\varphi)\frac{d\Delta w}{dx}-\omega\cdot\frac{d\Delta\varphi}{dx}\quad\cdots(9)$$

$$\Delta\bar{v}=\Delta v-z\cdot\Delta\varphi\quad\cdots(10)$$

$$\Delta\bar{w}=\Delta w+y\cdot\Delta\varphi\quad\cdots(11)$$

$$\Delta\bar{\varphi}=\Delta\varphi\quad\cdots(12)$$

ω はそり関数であり，断面の形とその断面内の原点の位置が決まると求めることができるものである。また，仮定にも述べたようにこの ω は断面が降伏しても変わらないとしている。

4.3 要素内部の歪増分

要素内部の任意の点 (x, y, z) における要素軸方向の歪増分 $\Delta\varepsilon_x$ は，大変形を考慮して以下のように求める。

$$\Delta\varepsilon_x=\frac{d\Delta\bar{u}}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta\bar{v}}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta\bar{w}}{dx}\right)^2\text{(注-6)}\quad\cdots(13)$$

$$=\frac{d\Delta u}{dx}-y\cdot\frac{d^2\Delta v}{dx^2}-z\cdot\frac{d^2\Delta w}{dx^2}-\omega\cdot\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}-y\cdot\Delta\varphi\cdot\frac{d^2\Delta w}{dx^2}+z\cdot\Delta\varphi\cdot\frac{d^2\Delta v}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2$$

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

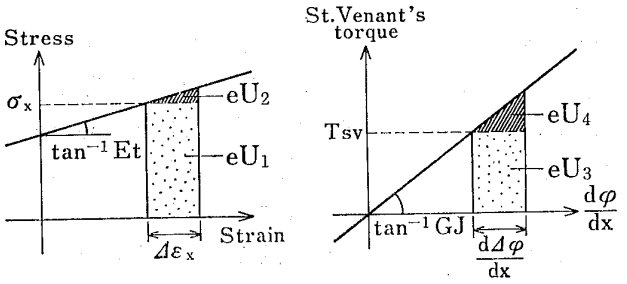


Fig. 5 Incrimental strain energy

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta w}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}(y^2+z^2)\left(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\right)^2 \quad \cdots(14)$$

4.4 一つの要素に貯えられる歪エネルギー増分

変位増分によって要素に貯えられる歪エネルギー増分 ${}_eU$ は，Fig. 5 に示すように，その Step または Iteration の計算を行う直前に生じている応力が，歪増分によってなす歪エネルギー増分と，歪増分によって生じる応力増分が，歪増分によってなす歪エネルギー増分の和として (15) 式のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}\Delta_eU&=\Delta_eU_1+\Delta_eU_2+\Delta_eU_3+\Delta_eU_4\\&=\int_l\int_A\sigma_x\cdot\Delta\varepsilon_x\cdot dAdx+\frac{1}{2}\int_l\int_A E_t\cdot\Delta\varepsilon_x{}^2dAdx\\&\quad+\int_l T_{sv}\cdot\frac{d\Delta\varphi}{dx}dx+\frac{1}{2}\int_l G\cdot J\cdot\left(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\right)^2dx\end{aligned} \quad \cdots\cdots(15)$$

ただし，
E_t：接線係数
G：剪断係数
T_{sv}：サンブナンの捩りモーメント
J：サンブナンの定数
l：要素の長さ
A：要素の断面積

4.5 変位増分関数の設定

要素が降伏しているか否かにかかわらず，要素の座標の x 軸方向変位増分 Δu は x の一次式，y, z 方向の変位増分 Δv, Δw および捩れ増分 $\Delta\varphi$ は x の三次式の関数で表わす。

$$\left.\begin{aligned}\Delta u&=\alpha_1+\alpha_2x\\\Delta v&=\alpha_3+\alpha_4x+\alpha_5x^2+\alpha_6x^3\\\Delta w&=\alpha_7+\alpha_8x+\alpha_9x^2+\alpha_{10}x^3\\\Delta\varphi&=\alpha_{11}+\alpha_{12}x+\alpha_{13}x^2+\alpha_{14}x^3\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(16)$$

ただし，$\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_7,\ \alpha_8,\ \alpha_9,\ \alpha_{10},\ \alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13},\ \alpha_{14}\}^T$ は変位増分関数の未定係数である。

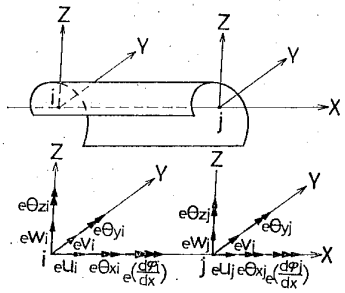


Fig.6 Components of incrimental displacement vectors

4.6 要素の節点変位増分ベクトルと未定係数

マトリックスの変位法通常の考え方により，構造物の挙動を示すパラメーター（変位，回転角，力，モーメント等）は構造体の中に配置された節点だけで考慮される。つまり，各要素の内部の性状は両端。節点の変位，回転角等で表わされる。本解析法で用いる要素の節点変位増分ベクトル $\Delta_e\boldsymbol{u}$ は (17) 式に示される成分をもち，これを Fig. 6 に図示する。

$$\begin{aligned}\Delta_e\boldsymbol{u}=\Big\{&\Delta_eu_i,\ \Delta_ev_i,\ \Delta_ew_i,\ \Delta_e\theta_{xi},\ \Delta_e\theta_{yi},\ \Delta_e\theta_{zi},\ {}_e\left(\frac{d\Delta\varphi_i}{dx}\right)\\&\Delta_eu_j,\ \Delta_ev_j,\ \Delta_ew_j,\ \Delta_e\theta_{xj},\ \Delta_e\theta_{yj},\ \Delta_e\theta_{zj},\ {}_e\left(\frac{d\Delta\varphi_j}{dx}\right)\Big\}^T\end{aligned} \quad \cdots\cdots(17)$$

ただし，i, j は両端の節点名である。

この式の各増分変位の成分に対応する力を，i 端について述べれば，初めの 3 項は要素の座標系 x, y, z 方向の力であり，次の 3 項は各軸回りのモーメントである。第 7 項に対応する力は，通常バイモーメントと呼ばれ $\int_A\sigma_x\omega dA$ で表わされる。j 端についても同様である。

この要素の変位増分ベクトル $\Delta_e\boldsymbol{u}$ と未定係数 $\boldsymbol{\alpha}$ の関係は，変位増分関数と変位増分関数を微分した関数に，要素の両端の座標値を代入したマトリックスによって簡単に導くことができる。

$$\Delta_e\boldsymbol{u}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\alpha} \quad \cdots\cdots(18)$$

$$\boldsymbol{T}=\begin{Bmatrix}
1 & -l/2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & 1 & -l/2 & l^2/4 & -l^3/8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -l/2 & l^2/4 & -l^3/8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -l/2 & l^2/4 & -l^3/8\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & l & -3l^2/4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & 1 & -l & 3l^2/4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -l & 3l^2/4 & \cdot\\
1 & l/2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & 1 & l/2 & l^2/4 & l^3/8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & l/2 & l^2/4 & l^3/8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & l/2 & l^2/4 & l^3/8\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -l & -3l^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & 1 & l & 3l^2/4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & l & 3l^2/4 & \cdot
\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(19)$$

ただし，l は一つの要素の軸方向の長さである。

$\boldsymbol{T}$ の逆マトリックスを計算することによって，$\boldsymbol{\alpha}$ は $\Delta_e\boldsymbol{u}$ によって (20) 式のように表わすことができる。

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\Delta_e\boldsymbol{u} \quad \cdots\cdots(20)$$

4.7 変位の微分と $\boldsymbol{\alpha}$

歪エネルギー増分の計算に必要な要素内部の歪を求めるために，x 軸上における $d\Delta u/dx$, $d\Delta v/dx$, $d\Delta w/dx$, $d\Delta\varphi/dx$, $d^2\Delta w/dx^2$, $d^2\Delta v/dx^2$, $d^2\Delta\varphi/dx^2$ 等の変位の導関数が必要である。これらの導関数は変位関数を微分することによって，(21) 式のようにマトリックスと $\boldsymbol{\alpha}$ の積の形で表現することができる。

$$\begin{Bmatrix}d\Delta u/dx\\d\Delta v/dx\\d\Delta w/dx\\d\Delta\varphi/dx\\d^2\Delta w/dx^2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}
0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 2x & 3x^2\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 6x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}$$

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

$$\begin{bmatrix} d^2\Delta v/dx^2 \\ d^2\Delta\varphi/dx^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots\cdots 2\ 6x\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots 2\ 6x \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(21)$$

4.8 歪エネルギー増分の計算

(4.1)～(4.7) に述べたことにより，変位増分 $\Delta_e\boldsymbol{u}$ が生じたときに，一つの要素が貯える歪エネルギー増分を以下に示すように計算することができる。

(4.4) で求めた歪エネルギー増分 Δ_eU_1, Δ_eU_2, Δ_eU_3, Δ_eU_4 について各々求めていくことにする。

$$\begin{aligned}\Delta_eU_1&=\int_l\int_A\sigma_x\cdot\Delta\varepsilon_x dAdx\\&=\int_l\int_A\sigma_x\Big[\frac{d\Delta u}{dx}-y\frac{d^2\Delta v}{dx^2}-z\frac{d^2\Delta w}{dx^2}-\omega\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}\\&\quad-\frac{y}{2}\Big(\Delta\varphi\frac{d^2\Delta w}{dx^2}+\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\Delta\varphi\Big)\\&\quad+\frac{z}{2}\Big(\Delta\varphi\frac{d^2\Delta v}{dx^2}+\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\Delta\varphi\Big)\\&\quad+\frac{1}{2}\Big(\frac{d\Delta v}{dx}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{d\Delta w}{dx}\Big)^2\\&\quad+\frac{1}{2}(y^2+z^2)\Big(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\Big)^2\Big]dAdx\quad\cdots\cdots(22)\\&=\boldsymbol{\alpha}^T\cdot(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_4)\\&\quad+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\cdot(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4)\cdot\boldsymbol{\alpha}\quad\cdots\cdots(23)\end{aligned}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{a}_1&=\int_l\Big(\int_A\sigma_x dA\Big)\frac{d\Delta u}{dx}dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{a}_2&=\int_l\Big(\int_A\sigma_x y dA\Big)\frac{d^2\Delta v}{dx^2}dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{a}_3&=\int_l\Big(\int_A\sigma_x z dA\Big)\frac{d^2\Delta w}{dx^2}dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{a}_4&=\int_l\Big(\int_A\sigma_x\omega dA\Big)\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A\sigma_x dA\Big)\Big\{\Big(\frac{d\Delta v}{dx}\Big)^2+\Big(\frac{d\Delta w}{dx}\Big)^2\Big\}dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big\{\int_A\sigma_x(y^2+z^2)dA\Big\}\Big(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\Big)^2dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A\sigma_x y dA\Big)\Big(\Delta\varphi\frac{d^2\Delta w}{dx^2}+\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\Delta\varphi\Big)dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A\sigma_x z dA\Big)\Big(\Delta\varphi\frac{d^2\Delta v}{dx^2}+\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\Delta\varphi\Big)dx\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(24)$$

$\boldsymbol{a}_1$～$\boldsymbol{a}_4$ は 14×1 のベクトル，$\boldsymbol{A}_1$～$\boldsymbol{A}_4$ は 14×14 のマトリックスであり，詳細は Appendix に載せる。

$$\begin{aligned}\Delta_eU_2&=\frac{1}{2}\int_l\int_A E\cdot\Delta\varepsilon_x{}^2dAdx\\&=\frac{1}{2}\int_l\int_A E\cdot\Big[\frac{d\Delta u}{dx}-y\frac{d^2\Delta v}{dx^2}-z\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\\&\quad-\omega\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}-y\Delta\varphi\frac{d^2\Delta w}{dx^2}+z\Delta\varphi\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\\&\quad+\frac{1}{2}\Big(\frac{d\Delta v}{dx}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{d\Delta w}{dx}\Big)^2\\&\quad+\frac{1}{2}(y^2+z^2)\Big(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\Big)^2\Big]^2dAdx\\&\fallingdotseq\frac{1}{2}\int_l\int_A E\cdot\Big[\Big(\frac{d\Delta u}{dx}\Big)^2+y^2\Big(\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\Big)^2\\&\quad+z^2\Big(\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\Big)^2+\omega^2\Big(\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}\Big)^2\\&\quad-y\Big(\frac{d\Delta u}{dx}\frac{d^2\Delta v}{dx^2}+\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\frac{d\Delta u}{dx}\Big)\\&\quad-z\Big(\frac{d\Delta u}{dx}\frac{d^2\Delta w}{dx^2}+\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\frac{d\Delta u}{dx}\Big)\\&\quad-\omega\Big(\frac{d\Delta u}{dx}\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}\frac{d\Delta u}{dx}\Big)\\&\quad+yz\Big(\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\frac{d^2\Delta w}{dx^2}+\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\Big)\\&\quad+y\omega\Big(\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\Big)\\&\quad+z\omega\Big(\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\Big)\Big]dAdx\\&\qquad\cdots\cdots\text{(注-7)}\quad(25)\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\cdot(\boldsymbol{A}_5+\boldsymbol{A}_6+\boldsymbol{A}_7+\boldsymbol{A}_8-\boldsymbol{A}_9-\boldsymbol{A}_{10}\\&\quad-\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{13}+\boldsymbol{A}_{14})\cdot\boldsymbol{\alpha}\quad\cdots\cdots(26)\end{aligned}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_5\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A E dA\Big)\Big(\frac{d\Delta u}{dx}\Big)^2dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_6\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A Ey^2dA\Big)\Big(\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\Big)^2dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_7\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A Ez^2dA\Big)\Big(\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\Big)^2dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_8\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A E\omega^2dA\Big)\Big(\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}\Big)^2dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_9\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A Ey dA\Big)\Big(\frac{d\Delta u}{dx}\frac{d^2\Delta v}{dx^2}+\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\frac{d\Delta u}{dx}\Big)dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{10}\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A Ez dA\Big)\Big(\frac{d\Delta u}{dx}\frac{d^2\Delta w}{dx^2}+\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\frac{d\Delta u}{dx}\Big)dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A E\omega dA\Big)\Big(\frac{d\Delta u}{dx}\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}\frac{d\Delta u}{dx}\Big)dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A Eyz dA\Big)\Big(\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\frac{d^2\Delta w}{dx^2}+\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\Big)dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{13}\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A Ey\omega dA\Big)\Big(\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\Big)dx\\\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}_{14}\boldsymbol{\alpha}&=\int_l\Big(\int_A Ez\omega dA\Big)\Big(\frac{d^2\Delta w}{dx^2}\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\Delta\varphi}{dx^2}\frac{d\Delta w}{dx^2}\Big)dx\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(27)$$

$\boldsymbol{A}_5$～$\boldsymbol{A}_{14}$ は 14×14 のマトリックスであり，詳細は Appendix に載せる。

$$\begin{aligned}\Delta_eU_3&=\int_l T_{sv}\cdot\frac{d\varphi}{dx}dx\\&=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{a}_5\quad\cdots\cdots(28)\\\Delta_eU_4&=\frac{1}{2}\int_l GJ\Big(\frac{d\varphi}{dx}\Big)^2dx\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\cdot\boldsymbol{A}_{15}\cdot\boldsymbol{\alpha}\quad\cdots\cdots(29)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_5$ は 14×1 のベクトル，$\boldsymbol{A}_{15}$ は 14×14 のマトリックスであり，詳細は Appendix に載せる。

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

以上に計算された $\Delta_e U_1$, $\Delta_e U_2$, $\Delta_e U_3$, $\Delta_e U_4$ の和は，一つの要素に貯えられる歪エネルギー増分である。

$$\begin{aligned}\Delta_e U &= \Delta_e U_1 + \Delta_e U_2 + \Delta_e U_3 + \Delta_e U_4 \\ &= \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5) \\ &\quad + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4 + \boldsymbol{A}_5 + \boldsymbol{A}_6 + \boldsymbol{A}_7 \\ &\quad + \boldsymbol{A}_8 - \boldsymbol{A}_9 - \boldsymbol{A}_{10} - \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{12+13} + \boldsymbol{A}_{13} \\ &\quad + \boldsymbol{A}_{14} + \boldsymbol{A}_{15})\boldsymbol{a} \\ &= \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{a} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a} \quad \cdots\cdots(30)\end{aligned}$$

(30) 式に (20) 式を代入することによって (31) 式を得る。

$$\begin{aligned}\Delta_e U &= \Delta_e \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{T}^{-1T} \cdot \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\Delta_e \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{T}^{-1T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \Delta_e \boldsymbol{u} \\ &= \Delta_e \boldsymbol{u}^T \cdot {}_e\boldsymbol{f}_{\text{in}} + \frac{1}{2}\Delta_e \boldsymbol{u}^T \cdot {}_e\boldsymbol{K} \cdot \Delta_e \boldsymbol{u} \quad \cdots\cdots(32)\end{aligned}$$

ただし，

$${}_e\boldsymbol{K} = \boldsymbol{T}^{-1T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \quad \cdots\cdots(32)$$

$${}_e\boldsymbol{f}_{\text{in}} = \boldsymbol{T}^{-1T} \cdot \boldsymbol{a} \quad \cdots\cdots(33)$$

このようにして，3章の (1) 式に説明した ${}_e\boldsymbol{K}$ と ${}_e\boldsymbol{f}_{\text{in}}$ を導くことができる。

4.9 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{A}$ を求めるための積分法

Appendix に詳細を載せた $\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_5$, $\boldsymbol{A}_1 \sim \boldsymbol{A}_{15}$ を求めるためには，多くの積分計算を必要とする。本論文では，以下に示す方法に従ってこれらの積分を行っている。

断面内の面積積分 $\int_A \sigma_x dA, \int_A \sigma_x y dA, \int_A \sigma_x z dA, \cdots\cdots$ は，仮定 (8) に述べたように断面を数十の単位の面の集まりとみなしているので，連続な積分 $\int$ は $\sum$ の記号に置き換えられ，簡単に計算できる。例えば (34) 式のようである (Fig. 2)。

$$\int_A \sigma_x y dA = \sum_k \sigma_{xk} y_k A_k \quad \cdots\cdots(34)$$

ただし，σ_{xk}：k 面の応力度

y_k：k 面の重心の座標値

A_k：k 面の面積

要素の軸方向の積分は，断面の面積積分を要素の両端で計算し，これらの面積積分の値が要素内で線形に変化しているものと仮定して行う。本解析では，最高 x の四次式までの積分が必要であり，両端での面積積分の値がそれぞれ P_i, P_j であるとき，各次数の積分は以下のようにして実行することができる。

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-l/2}^{l/2} P dx = \frac{l}{2}(P_j + P_i) \\ &\int_{-l/2}^{l/2} P \cdot x dx = \frac{l^2}{12}(P_j - P_i) \\ &\int_{-l/2}^{l/2} P \cdot x^2 dx = \frac{l^3}{24}(P_j + P_i) \\ &\int_{-l/2}^{l/2} P \cdot x^3 dx = \frac{l^4}{80}(P_j - P_i) \\ &\int_{-l/2}^{l/2} P \cdot x^4 dx = \frac{l^5}{160}(P_j + P_i)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(35)$$

4.10 絶対座標の定義と変換マトリックス

三次元の骨組構造を扱うため，X, Y, Z の三軸をもつ立体座標を定義する。この立体座標系は，要素の変形，その他には全く影響を受けず，不動のものであり，絶対座標系と呼ぶ。

この座標系において，各々の節点に Δu, Δv, Δw, $\Delta\theta_X$, $\Delta\theta_Y$, $\Delta\theta_Z$ の6個の変位増分の成分を考慮する。要素の材軸方向の回転の微分項 $d\Delta\varphi/dx$ も未知量として各節点に考える。この $d\Delta\varphi/dx$ は，各要素の材軸方向 x の成分をもつベクトルである。ほぼ要素が直線的に続いている一部材の間では，隣り合う要素において，このベクトル間の余弦が非常に1に近いと考えられるので，$d\Delta\varphi/dx$ は要素の座標系において考え，絶対座標系への変換を行う必要がないものとする。

その他の6個の変位成分についての座標変換は，立体骨組解析に通常用いられているとおりで，要素の座標系と絶対座標系の変位増分間の関数を示すと (36) 式のように表わされる。

$$\Delta_e \boldsymbol{u} = {}_e\boldsymbol{L} \cdot \Delta \boldsymbol{u} \quad \cdots\cdots(36)$$

ただし，

$${}_e\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{\Lambda} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{\Lambda} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{\Lambda} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(\text{注-8})(37)$$

$$\Delta \boldsymbol{u} = \left\{\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i, \Delta\theta_{Xi}, \Delta\theta_{Yi}, \Delta\theta_{Zi}, \frac{d\Delta\varphi_i}{dx}, \Delta u_j, \Delta v_j, \Delta w_j, \Delta\theta_{Xj}, \Delta\theta_{Yj}, \Delta\theta_{Zj}, \frac{d\Delta\varphi_j}{dx}\right\}^T$$

5. 増分後の変更

Step by step の過程においても，Iteration の過程においても，変位増分後の変更を以下のようにしなければならない。

(1) 絶対座標系における変位増分を (36) 式を用いて，要素の座標系における変位増分に変換する。

(2) $\Delta_e \boldsymbol{u}$ より，変位増分関数の未定係数 $\boldsymbol{a}$ を (20) 式から求める。

(3) 要素の両端における変位増分の導関数の値を，$\boldsymbol{a}$ を用いて (21)式によって計算し，その結果を (14) 式へ代入することにより，要素両端断面における単位となっている各々の面の歪増分を求める。

(4) 要素両端の各々の単位面の歪増分により，その単位面の応力度を修正する。応力の修正法は Step by step と Iteration を行っている場合によって，処理が少々異なる。増分前に弾性であった部分，または，塑性域にあっても歪の戻りが生じなかった部分については，Fig. 3, の関係に従っ

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

て，簡単に応力度を修正できる。しかし，応力状態が塑性域にあり歪の戻りが生じたとき，Step by step の計算であれば，弾性回復と考えるが，Iteration の計算を行っている場合には，必ずしも弾性回復したとは考えず，その Iteration の処理をしている Step の間に通ってきた軌跡を応力-歪曲線と考え，処理する。

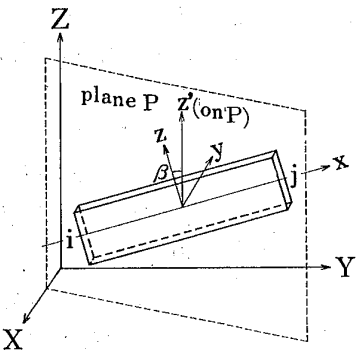


Fig. 7 Element coordinates versus global coordinates

（5） 構造体の中にある節点の座標を変位増分に従って，(38) 式のように変更する。

$$\left.\begin{aligned} X_i' &= X_i + \Delta u_i \\ Y_i' &= Y_i + \Delta v_i \\ Z_i' &= Z_i + \Delta w_i \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(38)$$

ただし，X_i, Y_i, Z_i は変位増分前の節点の i 座標値，X_i', Y_i', Z_i' は変位増分後の i 節点の座標値である。

（6） 変位増分にともなって生じる要素の回転により，要素の断面の主軸の向き（コードアングル β）も変化する。コードアングル β は要素の軸のベクトルと同じ方向のベクトルであることを考えると，回転増分 $\Delta\beta$ は要素両端の回転の平均値として，(39) 式で表わすことができる。

$$\Delta\beta = \frac{1}{2}\left\{(\lambda, \mu, \nu)\begin{Bmatrix}\Delta\theta_{Xi}\\ \Delta\theta_{Yi}\\ \Delta\theta_{Zi}\end{Bmatrix} + (\lambda, \mu, \nu)\begin{Bmatrix}\Delta\theta_{Xj}\\ \Delta\theta_{Yj}\\ \Delta\theta_{Zj}\end{Bmatrix}\right\} \quad \cdots\cdots(39)$$

結果として，変形後のコードアングル β' は変形後の要素の方向余弦 (λ', μ', ν') へ写され，(40) 式となる。

$$\beta' = (\lambda'\lambda + \mu'\mu + \nu'\nu)(\beta + \Delta\beta) \quad \cdots\cdots(40)$$

（7） サンブナンの捩れに関しては常に弾性を保つと考えているために，変形後のサンブナンの捩れモーメント T_{sv}' は各々の要素の両端について (41) 式で計算される。

$$T_{sv}' = T_{sv} + GJ\frac{d\Delta\varphi}{dx} \quad \cdots\cdots(41)$$

6. 解析例

前章までに設明してきた解析法を用いて，(1) 繰返し二軸曲げモーメントを受ける柱の非線形挙動，(2) 曲げモーメントを受ける梁の横座屈および座屈後の挙動，(3) K型筋違付一層ラーメンの面外座屈および座屈後の挙動の三つの問題を解析し，満足すべき結果を得た。なお，これらの例題に用いた部材はすべてH形鋼であり，断面の分割を Fig. 8 に，材料の機械的性質に Table 1 に示す。

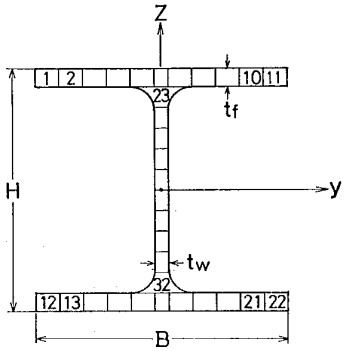


Fig. 8 Cross section of a wide flange member

Table 1 Mechanical properties of materials

E : Young's modulus		2100.0
G : Modulus of elasticity in shear		810.0
a in Fig. 2		21.0
b in Fig. 2		10.5
σ_y : Yield stress	(1)	2.7
	(2)	2.98
	(3) Column & Beam	2.88
	(3) Brace	2.75

(unit : t/cm²)

（1） 繰返し二軸曲げモーメントを受ける柱の非線形挙動，

Fig. 9 に示すように両端ピン支持の H 形断面部材に対して，材端における断面の重心 0 を原点にとり絶対座標系 X-Y-Z を定め，断面の重心位置に一定の軸方向圧縮力 P が加わった状態で，柱の上下端に Y 軸と Z 軸まわりに働く曲げモーメント M_Y と M_Z が比例的に増減する場合について考える。

部材断面は H-100×100×6×8，軸方向圧縮力は断面の降伏軸力 P_y の 0.2 倍，部材の長さ L は 197 cm とし，材端における捩れと断面のそりが完全に拘束されている場合について解析する。数値解析にあたっては，系の対称性により，柱の半分についてのみ取り扱い，10 個の要素に等分し，Table 1 に示す諸性質を用いる。

Fig. 10 に $M_Y/M_Z=2.85$ のときのモーメント ($M=\sqrt{M_Y{}^2+M_Z{}^2}$) と柱中央点の変位の関係を示す。実線は Z 軸方向変位 W，破線は Y 軸方向変位 V を表わしている。また，Z 軸方向変位線上に "▼" で示した状態における柱中央断面の応力分布図を Fig. 11 (a), (b), (c) に示す。塑性域の進行と戻りの様子がわかる。

Fig. 12 にモーメントと柱中央点の変位の関係（実線は Z 軸方向，破線は Y 軸方向変位）を，本解析と同じ条件での，文献 (3) の実験結果および文献 (2) の解析法により求めたものとともに詳細に図示する。これらの文献の結果は最大モーメントまでであるが，よく一致していることがわかる。

（2） 曲げモーメントを受ける梁の横座屈および座屈後の挙動

NII-Electronic Library Service

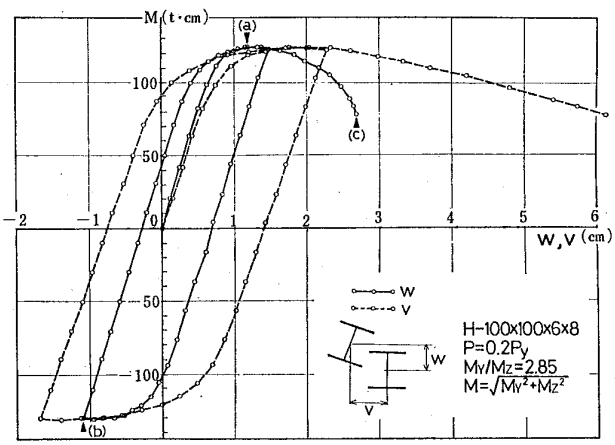


Fig. 10 Moment-displacement relationships

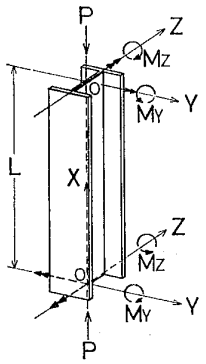


Fig. 9 Column under biaxial bending

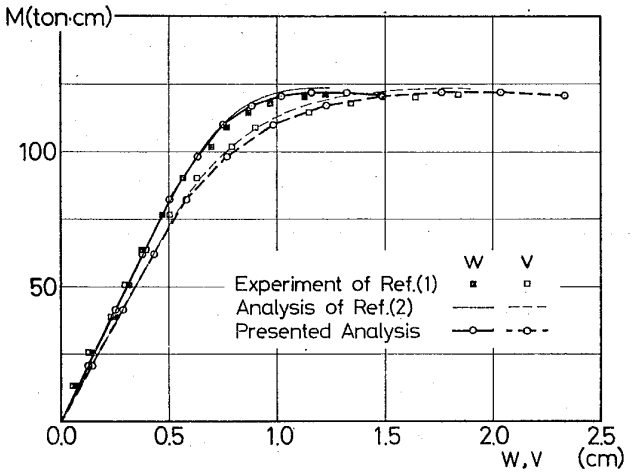


Fig. 12 Comparison with experiment and other analysis

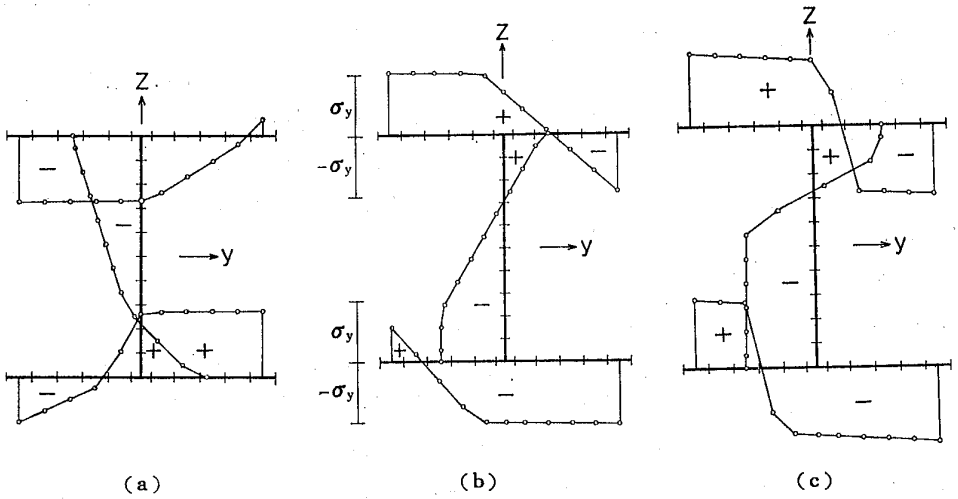


Fig. 11 Stress distribution at midspan

す。太い実線は Z 軸方向変位 W, 破線は Y 軸方向変位 V, 細い実線は捩れ角 θ_x を示している。また, Z 軸方向変位の線上に "▼" で示した状態における梁中央断面の応力分布図を Fig. 15 (a), (b) に示す。横座屈後, 圧縮側フランジにおいて, 一部引張応力が生じていることがわかる。

(3) K型筋違付一層ラーメンの面外座屈および座屈後の挙動

Fig. 16 に示すような K 型筋違付一層ラーメンを Fig. 17 のようにモデル化し, 繰返し水平力が作用する場合を考え, 文献 (4) の実験結果と比較するために, 柱, 梁材の断面は H-194×150×6×9, 筋違材の断面は H-100×100×5×7 とする。柱材は 5 個の要素, 梁材は 20 個の要素, 筋違材は 15 個の要素で構成する。図の点 1,7 では変位と回転を空間的に拘束し, 点 2, 3,5,6 では面外方向の変位を拘束している。また, 各部材の両端の断面のそりも拘束している。筋違材には部材中央に長さの 1/2 000 の面外方向の初期たわみを与えておく。

材料の機械的性質は Table 1 に示すものとする。文献 (4) の実験に用いた鋼材の降伏応力度は, 柱, 梁材ではフランジ 2.88 t/cm², ウェブ 3.09 t/cm², 筋違材ではフランジ 2.75 t/cm², ウェブで 2.71 t/cm² あるが, 本解析では Table 1 に示すように, フランジの降伏応力度をもって部材の降伏応力度としている。

Fig. 18 に水平荷重と点 2 での水平変位との関係を示す。点線は文献 (4) の実験結果である。全体的な挙動は, 部分的差異を除くと実験結果と一致しているとみなせる。ただ, 文献 (6) でも考察したように, 本解析の最大荷重が実験結果より高いことは構造物の初期変形および残留応力を無視したため考えられ, 最大荷重後 (筋違が座座屈した後) の荷重低下が解析結果のほうが実験結果よりも急激であることは, Fig. 16 と Fig. 17 を比べると明らかなように, 解析において各部材を節点間を直接結ぶ線材と考えた結果, 筋違の細長比を実験より大きく評価したためと考えられる。

Fig. 13 に示すような初期捩れを有する単純支持の梁に, 等モーメント M が働く場合を考える。端部の捩れは拘束し, そりは自由とする。部材断面は, H-200×100×5.5×8, 部材の長さ L は 250 cm である。数値解析にあたっては, 柱の場合と同じく, 系の対称性により, 梁の半分についてのみ取り扱い, 10 個の要素に等分し, Table 1 に示す諸性質を用いる。

Fig. 14 にモーメントと梁中央点の変位の関係を示

Fig. 19 (a), (b), (c), (d) は, Fig. 18 の点 ①, ③,

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

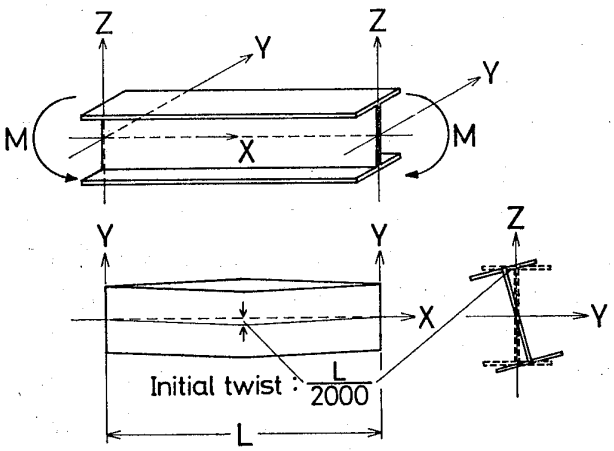


Fig. 13 Beam under uniform moment

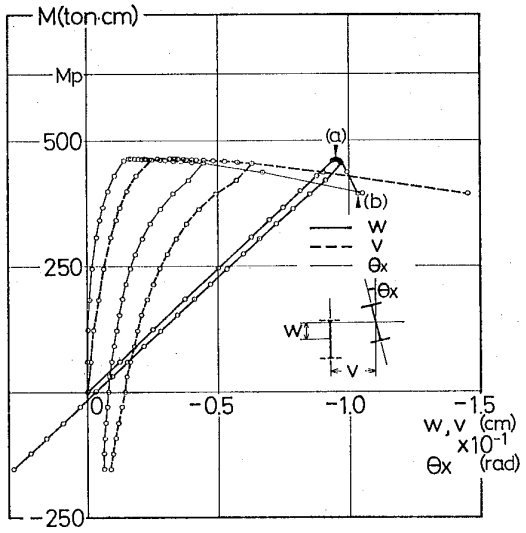


Fig. 14 Moment-displacement relationships

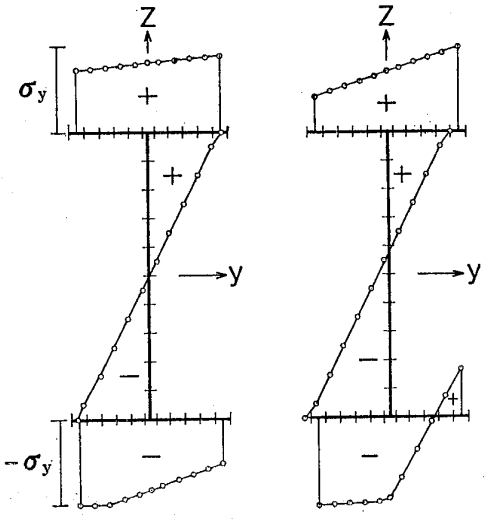
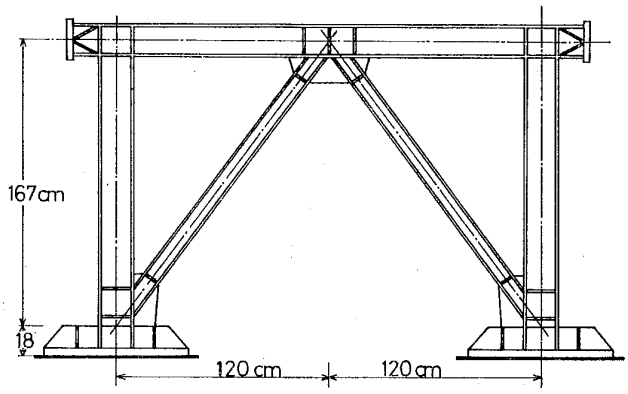


Fig. 15 Stress distribution at midspan



Fing. 16 Rigid steel frame with K-type brace under alternately repeated horizontal load

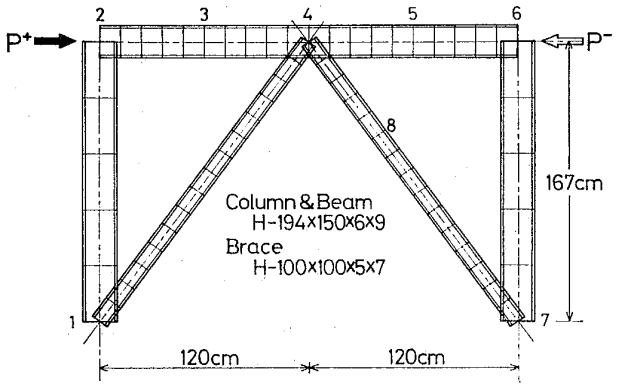


Fig. 17 Idealized model

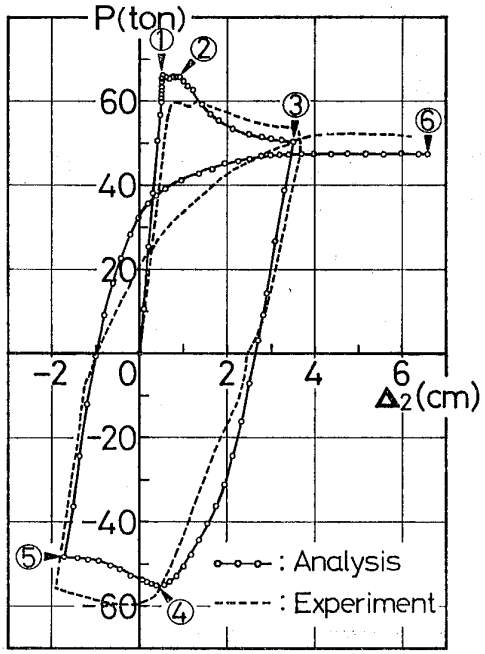


Fig. 18 Horizontal load-displacement relationships

⑤,⑥ の状態における Fig. 17 の点 8 の断面の応力分布図であり，Fig. 20 (a), (b), (c) は，点 ①,②,③ の状態における Fig. 17 の点 4 と 7 結ぶ筋違材の塑性域（黒く塗った部分）の進展を示す図である。

Fig. 21 (a), (b), (c) は，Fig. 18 の点③,⑤,⑥の状態における構造物の変形を，アイソメトリック透視図で描いたものである。この図から，筋違の面外座屈の様子および柱，梁の変形の様子がわかる。

7. 結　び

若干の仮定のもとに，ポテンシャルエネルギー増分の停留原理に基づいた鋼構造骨組の三次元非線形解析法を提示した。本解析法により，今までは難解とされていた

NII-Electronic Library Service

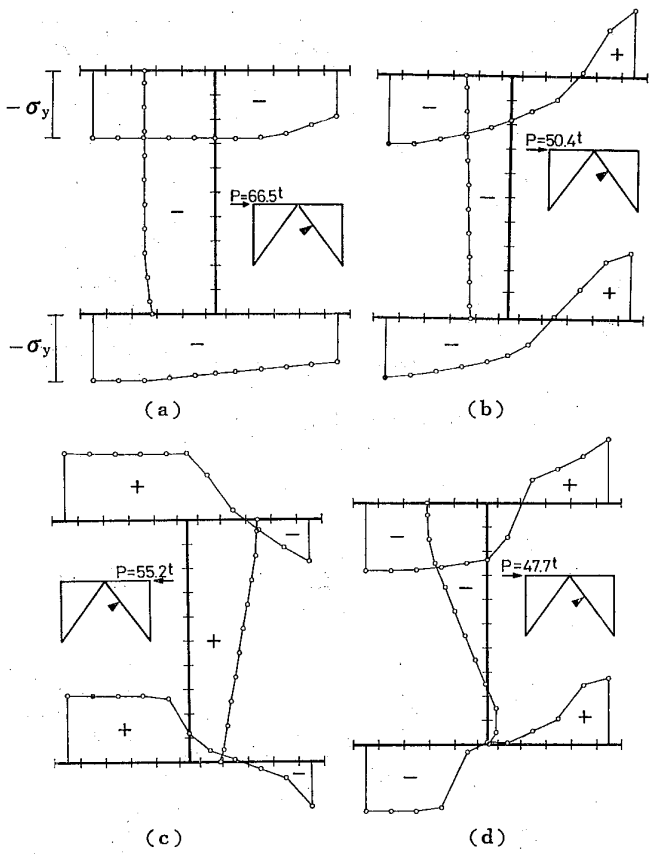


Fig. 19 Stress distribution at midspan of right side brace

柱，梁などの三次元非線形挙動の問題や，立体骨組の挙動などが統一的な考え方のもとで数値的に解くことができる。

本論文で提示した数値解析法は，厖大な記憶装置をもつ大容量のコンピュータを前提としたものである。論文中に示した筋違付骨組の例においては，変形する骨組の幾何学的形状の記憶，内部の応力，歪関係の追跡のために約 30,000 個の数値を各 Step に応じて記憶し，変更していく必要があった。あたかも，コンピュータの中に骨組の数値的モデルが形づくられているかのようである。ここまで解析が拡大されてくると，解析自体ある仮定の範囲で成立しているものであるが，その内容と結果は，扱った骨組に対する構造実験の結果とほぼ同レベルのものであると考えられる。実験と比較して，このような数値解析では，必要に応じて，例えば断面内の応力や歪分布の詳細を取り出して検討することが可能であるという大きな利点がある。

しかしながら，このような解析はあくまでも数値解析であって，例えば，上記の筋違付骨組に対して筋違の細長比，柱，梁の断面などが変化した場合などの骨組の力学的性状を把握する必要のある場合は，一つ一つファクターを変えて解き，それらの結果から帰納的に性状を求

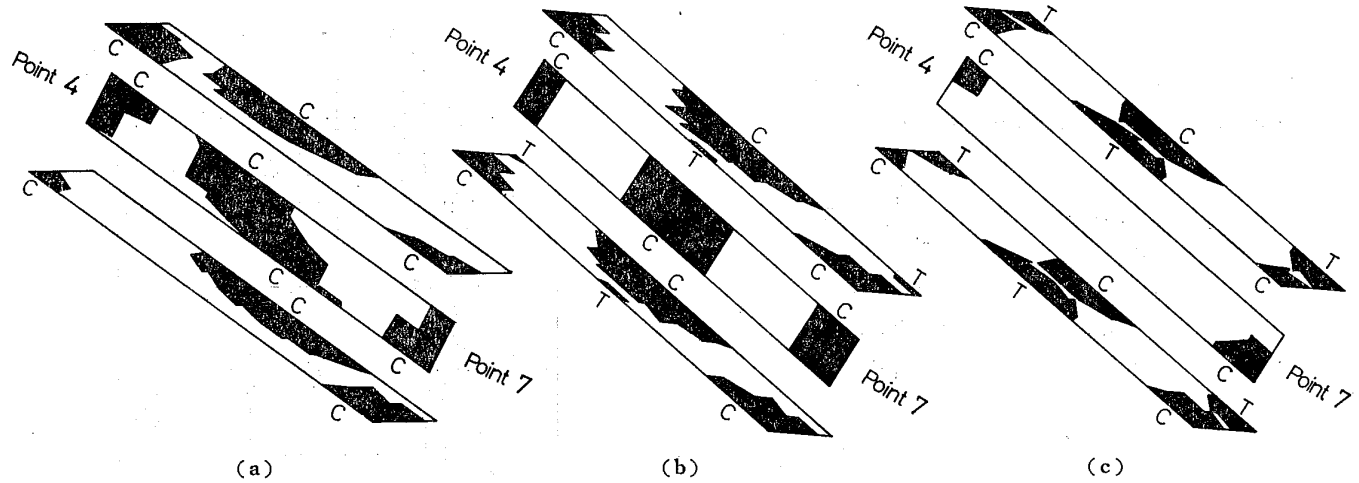


Fig. 20 Spread of plastic zones in the brace

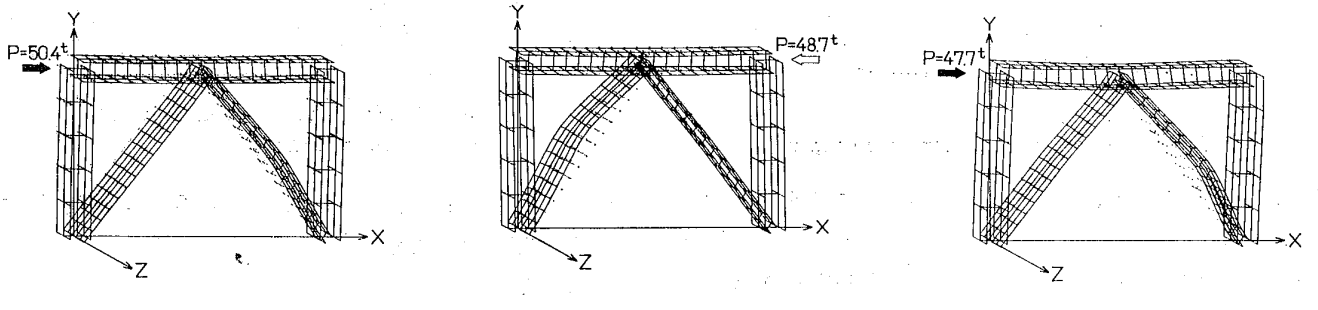


Fig. 21 Deformed pattern of frame

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

めざるをえないのであって，この点については実験も同じではあるが，本解析法の限界として明確に認識する必要があるものと思われる。

今後，断面の形が局部的な座屈等によって変わる場合なども含めて，さらに，本解析法について研究を進めるつもりであるが，同時に適切な仮定をたてることによって，コンピュータを前提としない一般的な解析的手法を用いて，骨組の力学的挙動に関する性状を把握する努力も積み重ねていくつもりである。

なお，著者等が行っているように[8]，骨組の安定性を信頼性理論を用いて確認するため，確率統計的手法を本論文で提示したような数値解析法に適用し，帰納的な方法で進めていく研究も，コンピュータをさらに積極的に使うという立場で重要なものであると考え，この関係の研究もあわせて積極的に進めるつもりである。

謝　辞

本研究を行うに際し，電々公社建築局特殊建築工事事務所調査役，工博，北後寿氏および同建築局守谷一彦氏には実験資料借用の便宜を計って戴きました。また，東京工業大学，鈴木研究室助手小野徹郎氏には薄肉断面部材の式を展開するにあたり助言を戴きました。ここに，感謝いたします。

参考文献

1) 吉識雅夫，藤田　譲，吉田宏一郎，大坪英臣，征矢勇夫：構造物の塑性設計（その8）—立体構造物の塑性崩壊—。日本造船学会論文報告集，第120号，昭和41年12月。
2) 藤本盛久，松本芳紀：軸力と2方向曲げモーメントをうけるH形断面部材の力学的性状に関する研究。その1—弾塑性解析法について。日本建築学会論文報告集，第173号，昭和45年7月。
3) 坂本　順，渡辺雅生，井元勝慶，宮村篤典：二軸曲げをうける鋼構造部材の塑性耐力に関する考察［II］。日本建築学会論文報告集，第176号，昭和45年10月。
4) 藤本盛久，橋本篤秀，小杉　立，北後　寿，北村栄一，吉良昌也：繰返し水平荷重をうける筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性性状に関する研究。（その2）—K型筋違付ラーメンの実験（I）—。日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和46年11月。
5) 藤本盛久，須藤福三，和田　章：任意形平面骨組の非線形応力解析。日本建築学会論文報告集，第189号，昭和46年11月。
6) 藤本盛久，和田　章，白方和彦，小杉　立：筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性解析に関する研究。日本建築学会論文報告集，第209号，昭和48年8月。
7) Sundaramoothy Rajasekaran and David W. Murray: Finite Element Solution of Inelastic Beam Equations. Proc. ASCE, Vol. 99, No. ST 6, June, 1973.
8) 藤本盛久，岩田　衛：鋼圧縮材の座屈強度の確率論的方法による研究—ランダムな初期たわみを有する圧縮材—。日本建築学会論文報告集，第218号，昭和49年4月。
9) 結城皓曠，前田幸雄：薄肉断面構造の三次元挙動の解析。土木学会論文報告集，第224号，1974年4月。
10) 藤本盛久，和田　章，岩田　衛，中谷文俊：鋼構造骨組の三次元非線形解析（1．解析法），（2．解析例）。日本建築学会大会学術講演梗概集，昭和49年10月。

（注-1）

本論文においては，線材解析にとって重要である断面の性質を表わす各種の面積積分，たとえば断面積，軸力，断面一次モーメント等，本解析の誘導過程において15種の積分を必要とするが，これらをすべて無視することなく考慮している。このことによって，座標軸は断面内の適当な位置に設定することができ，断面が降伏しても，その断面に対する座標系の取り方を変更する必要がない。

（注-2）

本解析においては，局部座屈による耐力低下を無視したが，応力—歪関係の中に幅厚さ比に応じた耐力低下を考慮しておけば，全体的挙動の解析において局部座屈を近似的に考えることも可能である。

（注-3）

平面骨組解析においてよく使われている Shear Panel の考え方を拡張することによって，三次元的な Shear Panel を考慮することができる。このような構造要素を考えることにより，部材間のそりおよびそれに関する力（バイモーメント）の伝達を考慮することも可能である。

（注-4）

増分変形の解析の範囲に限定して，応力—歪関係を初期応力の存在下で非線形弾性体とすることによりポテンシャルエネルギーとしての歪エネルギー増分の存在が保証できる。また，外力として保存力のみを考慮しているために，外力もポテンシャルを有する。これらのことにより，ポテンシャルエネルギー増分の停留原理を用いることが可能となる。

（注-5）

Step by step 法は，力または変位を段階的に変化させる計算法であり，Iteration 法は，その一段階の Step において生じる不釣合を修正させる計算法である。本論文で説明する増分計算法は，Step by step と Iteration に対して区別なく用い得る。

（注-6）

(13) 式には，本来，$1/2(d\Delta\bar{u}/dx)^2$ を含むべきであるが，この項は，骨組構造物においては曲げ変形に比較し，材軸方向の変形が小さいと考えられるので，$1/2(d\Delta\bar{v}/dx)^2$, $1/2(d\Delta\bar{w}/dx)^2$ と同次項ではあるが無視する。

（注-7）

この計算の中で，$\Delta\varphi\cdot d^2\Delta v/dx^2$, $\Delta\varphi\cdot d^2\Delta w/dx^2$, $(d\Delta v/dx)^2$, $(d\Delta w/dx)^2$ $(d\Delta\varphi/dx)^2$ 等に関する項は三次，四次の微小項になるために無視している。

（注-8）

(37) 式の $\boldsymbol{\Lambda}$ は 3×3 のマトリックスである。

ある要素の要端の節点が i, j であるとき，節点 i, j の絶対座標における座標を (X_i, Y_i, Z_i), (X_j, Y_j, Z_j) とすると，Fig, 7 のように要素 i-j を含み，X-Y 平面に垂直な平面からの z 軸の角度 β（コードアングル）が定義されると，$\boldsymbol{\Lambda}$ は次のように決まる。ただし，x 軸が Z 軸と平行である場合は他の方法により求めなければならない。

$$\lambda=(X_j-X_i)/l,\ \mu=(Y_j-Y_i)/l,\ \nu=(Z_j-Z_i)/l$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & \sin\beta\\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & \mu & \nu\\ -\dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} & \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} & 0\\ -\dfrac{\lambda\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} & -\dfrac{\mu\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} & \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\end{bmatrix}$$

NII-Electronic Library Service

Appendix

（1） ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \sim \boldsymbol{a}_5$ (14×1)

$$\boldsymbol{a}_1=\int_l\left(\int_A \sigma_x dA\right)\cdot\begin{Bmatrix}\cdot\\1\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{Bmatrix}dx,\quad \boldsymbol{a}_2=\int_l\left(\int_A \sigma_x y dA\right)\cdot\begin{Bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\2\\6x\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{Bmatrix}dx$$

$$\boldsymbol{a}_3=\int_l\left(\int_A \sigma_x z dA\right)\cdot\begin{Bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\2\\6x\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{Bmatrix}dx,\quad \boldsymbol{a}_4=\int_l\left(\int_A \sigma_x \omega dA\right)\cdot\begin{Bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\2\\6x\end{Bmatrix}dx$$

$$\boldsymbol{a}_5=\int_l T_{sv}\cdot\begin{Bmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\1\\2x\\3x^2\end{Bmatrix}dx$$

（2） マトリックス $\boldsymbol{A}_1 \sim \boldsymbol{A}_{15}$ (14×14)

$$\boldsymbol{A}_1=\int_l\left(\int_A \sigma_x dA\right)\cdot\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&1&2x&3x^2&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&2x&4x^2&6x^3&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&3x^2&6x^3&9x^4&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&2x&3x^2&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&2x&4x^2&6x^3&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&3x^2&6x^3&9x^4&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}dx$$

$$\boldsymbol{A}_2=\int_l\left(\int_A \sigma_x(y^2+z^2)\,dA\right)\cdot\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&2x&3x^2&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&2x&4x^2&6x^3&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&3x^2&6x^3&9x^4&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}dx$$

$$\boldsymbol{A}_3=\int_l\left(\int_A \sigma_x y dA\right)\cdot\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&2&2x&2x^2&2x^3&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&6x&6x^2&6x^3&6x^4&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&2&6x&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&2x&6x^2&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&2x^2&6x^3&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&2x^3&6x^4&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}dx$$

$$\boldsymbol{A}_4=\int_l\left(\int_A \sigma_x z dA\right)\cdot\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&2&2x&2x^2&2x^3&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&6x&6x^2&6x^3&6x^4&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&2&6x&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&2x&6x^2&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&2x^2&6x^3&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&2x^3&6x^4&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}dx$$

$$\boldsymbol{A}_5=\int_l\left(\int_A E dA\right)\cdot\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}dx$$

$$\boldsymbol{A}_6=\int_l\left(\int_A Ey^2 dA\right)\cdot\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&4x&12x&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&12x&36x^2&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}dx$$

$$\boldsymbol{A}_7=\int_l\left(\int_A Ez^2 dA\right)\cdot\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}dx$$

NII-Electronic Library Service

$$A_8=\int_l\left(\int_A E\omega^2 dA\right)\cdot$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\

Architectural Institute of Japan

U.D.C.624.014.5 : 539.4

Trans. of A.I. J. 日本建築学会論文報告集
No 227. Jan. 1975. 第227号・昭和50年1月

NONLINEAR THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF STEEL FRAME STRUCTURE

by Dr. Morihisa Fujimoto*
Akira Wada**
Mamoru Iwata ***
Fumitoshi Nakatani***
Members of A. I. J.

1. Introduction

Nowadays, the geometrical nonlinear problem and the material nonlinear problem have been brought in on a solvable stage by virtue of the stiffness matrix method and the finite element method which were developed in the late 1950s. For those members of steel frame structures, their deformation, stresses, strains, etc. can all be expressed as functions in relation to only the axis of each member on the assumption that the stresses in the direction of plate thickness are zero and their sectional shapes remain unchanged.

In case of steel frame structures, members can be analysed, always provided that the aforesaid-conditions can be assumed, to a considerably refined extent in relation with various nonlinear problems through utilizing the particular shape of the frame structure.

2. Assumptions for Analysis and Modeling of Structures

a) Each member is in the application of beam theory and is divided into 5 to 15 beam elements in order to insure its adherence to large deformation.

b) Shear deformations which are induced due to bending and local deformation of sections in structural members are neglected.

c) As for deformation of each element, deformation in axial direction, bending deformation in biaxial directions, torsional deformation including warping of sections, and St. Venant's torque are taken into account.

d) Regardless of plastic or elastic condition of sections, it is assumed that the sections remain plane as far as the bending in biaxial directions is concerned. The same is assumed also as to the warping function; that is, a function, $\omega(y, z)$ is used whatever the conditions of elasticity and plasticity are.

e) This method of analysis can be applied to any shapes of sections. Each section is divided into 30 to 40 units (Fig. 2). Then, for each of such units, stress (σ_x) and strain (ε_x) in axial direction are taken into account.

f) Yielding phenomena of the section are evaluated by the use of only σ_x and ε_x above, of which relationsare utilized as those in Fig. 3. For the purpose of establishing these relations, possibilities of repe ated loading, reversal of strain, etc. also are taken into consideration.

g) Stress and strain conditions within the elements are examined at both ends of elements, not regarding the intermediate parts. Calculation of strain energy involves stress condition of the inside; however, this can be linearly interpolated from the stress distribution at the both

* Professor of Tokyo Institute of Technology
** Computer Department, Tokyo Office, Nikken Sekkei Ltd
*** Graduate Student of Tokyo Institute of Technology

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

ends.

h) As far as St. Venant's torque is concerned, the behavior of the member is assumed to be elastic.

i) It is assumed the members are connected rigidly at nodal points each other.

j) In the analysis, due consideration is, without neglecting, given to various area integrals which indicate properties of section. Therefore, it follows that because coordinate axes can be set at any adequate position within the section, coordinate system to the particular section need not be changed even if the section is subjected to yielding.

3. Method of Analysis

Non-linear method discussed in this paper is the incremental method, also referred to as the initialstress method, which has developed on a basis of stationary principle of incremental potential energy. In this method, prime condieration is given to the incremental potential energy Π (Eq. 7) which is taken as difference between strain energy U (Eq. 3) expressed in quadratic form of incremental displacement and potential energy W_{ex} (Eq. 6) of external force which is dispersed through the displacement of the part subjected to external force. By applying variational method in quadratic form to Eq. 7, a simultaneous linear equation (Eq. 8) with respect to the incremental displacements is obtained. The equation thus obtained is reformulated and resolved repeatedly by means of a step by step method and a iteration method.

4. Stiffness Matrix and Internal Force Vector

a) Whenever each incremental displacement is computed, local coordinate system for each element is shifted and re-defined so that it passes through the both ends of the element. Here, the axis of local coordinate is taken on the axial direction of element.

b) The deformation within the element can be expressed by Equations (9), (10), (11) and (12) by the use of deformation on the axis; Δu, Δv, Δw and $\Delta\varphi$ which show respectively the incremental displacements along the x, y and z directions, and the torsional incremental displacement in the axial direction.

c) The incremental strain $\Delta\varepsilon_x$ within the element can be expressed by Eq. 14 considering large deformation.

d) Increment of strain energy is divided into four sectors and computed for each of them as shown in Figs. 5 (a) and (b).

e) The functions of Δu, Δv, Δw, $\Delta\theta_x$, $\Delta\theta_y$, $\Delta\theta_z$ and $d\Delta\varphi/dx$ are taken at ends of each element and displacement function having fourteen unknown coefficient is considered as to each element, by which numerical integrations of strain energy of each element ${}_eU$ are obtained. Thus, ${}_eU$ can be arranged into Eq. 15.

5. Modification due to Increment

The conditions of strain and stress distributions in the sections at both ends of each element are modified on a basis of incremental displacement induced at each element. Then, nodal coordinates, by which geometrical configuration of the structure may be determined, are modified by incremental displacement and angles of torsion to global coordinate system of each element (β) are modified by the use of the mean values of rotational analyes at both ends of each element.

6. Examples of Analysis

In order to examplify the efficiency of this analysis, a few analytical results have been obtained on (1) non-linear behavior of column which is subjected to repeated biaxial bending moment; (2) lateral buckling of beam which is subjected to bending moment; and (3) out-of-plane buckling of the rigid frame with K-type brace. Figs. 8 thro' 21 diagrams are related to this method of analysis. the method of analyses has been well substantiated by comparing the results with those obtained through experiments and other analysis methods.

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

U.D.C. 624.014.2 : 699.84

ASEISMIC CAPACITY OF STEEL STRUCTURES (I)

——Fundamentals ; Rigid Frames with and without Braces——

by Dr. **MINORU YAMADA**, Prof., Kobe Univ., and **HIROSHI KAWAMURA**, Assistant, Kobe Univ., Members of A.I.J.

The aseismic capacity of the steel structures which are composed of rigid frames with and without braces is presented as a figure illustrated in the spase whose coordinates are acceleration response factor, natural period and damping coefficient. This figure shows that it is reasonable that "strength" and "hysteretic damping capacity" are taken to be the earthquake-resisting factor of frames with and without braces respectively.

As for the frames without braces, the hysteretic damping capacity is estimated analytically based upon the flexural deformation mechanisms and fatigue characteristics of the structural members and sections composed of plate elements. By applying the hysteretic damping capacity to the steady-state resonacce of the structures subjected to forced sinusoidal ground vibrations, a concrete estimation procedure on the aseismic capacity of rigid steel frames without braces is proposed.

U.D.C. 624.014.5 : 539.4

NONLINER THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF STEEL FRAME STRUCTURE

(See Page 89)

by Dr. **MORIHISA FUJIMOTO**, Professor of Tokyo Institute of Technolgy, **AKIRA WADA**, Computer Repartment, Tokyo Office. Nikken Sekkei Ltd., **MAMORU IWATA** and **FUMITOSHI NAKATANI**, Graduate Student of Tokyo Instiute of Technology, Members of A.I.J.

U.D.C. 697.1

THE APPLICATION OF THE THERMAL NETWORK METHOD TO THE CALCULATION OF THE UNSTEADY HEAT LOAD OF BUILDINGS

(Part 1·Fundamental Theory)

by Dr. **YOSHIMI URANO**, Prof., Kyushu Univ., **OSAMU ISHIHARA**, Assist., Kushu Univ., Members of A.I.J.

There are various studies about heat flow through walls using the analogy between heat conduction and electrical circuits. We also have studied from 1958, single walls using the R-C type electrical analog circuit method as a thermal network method, and from 1969, the fluctuation of room-air temperature and the application of this method to the air conditioning load.

Comparison between the value of actual measurement of room-air temperature and cooling load and the thermal network method has produced good results.

The purpose of this paper, as of the first report, is to add to the fundamental theory from the application of the thermal network method to the calculation of the unsteady heat load of buildings.

(1) Analogy between one dimensional heat conduction and electrical circuits.

(2) Description of the thermal network of walls and room, and analysis by 2-P F-matrix method.

(3) Study and comparison with the above method and a strict mathematical analysis with regard to the composition of the wall and the effect on errors.

NII-Electronic Library Service