昭和48年6月6日～8日
日本鋼構造協会第7回大会研究集会
マトリックス構造解析法研究発表論文集

平面架構を組み立てた立体架構の面置換による解析

Space frame analysis using plane stress model equivalent to planner frames

寺本隆幸*
和田章**

はじめに

建築物における耐力要素は柱（鉛直材），梁（水平材），壁（ブレースなどの斜材を含む）により構成されている。主たる外力である地震力（水平力）に対する応力解析は各部材を線材とみたしたマトリックス変位法による解析が行われているが，近年建築物が高層化するにつれて，

a. 架構の巨大化（建築層数の増加，柱間隔が短かくなり柱数の増加）
b. 架構の均一化（工業化の影響を受け，部材，階高，柱間隔が均一化）
c. 架構の立体化（従来は平面架構としてとり扱えるものが多かったが，直交している架構も含めて考えねばならなくなってきた。）

などの傾向が表われてきた。

例えば，新宿副都心に建つSビルの場合には，その解析対象の規模は節点数4331，部材数8029，自由度11441と巨大なものとなっている。（図-1参照）

これらの傾向に対処するために，大マトリックスの解法はもちろんであるが，何らかの近似解法が略設計の段階において必要となる。

ここで紹介するのは，均一な線材架構を等価な異方性板とみなして，F.E.M.による応力解析を行うものである。

この方法は，マクロ的な見方で建物を箱形断面の片持梁とみなして，全体的な変形，応力の流れをつかむことに適しているが，反面，均一性が乱れると適用が難しいこと，いくら精度を上げようとしても正解には到達し得ないという難点を持っている。

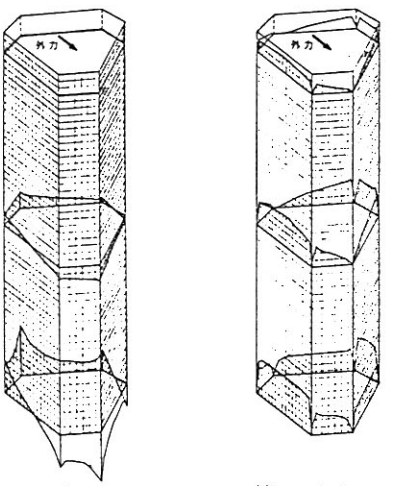


図-1 Sビルの骨組応力（この結果は通常の骨組解析によるもので，結果を連続的，立体的に示したものである。）

* 株式会社日建設計 構造部 ** 同 コンピューター室

昭和48年6月6日～8日
日本鋼構造協会第7回大会研究集会
マトリックス構造解析法研究発表論文集

1. 格子状骨組の面置換

図-2 に示したような格子状構造物，立体トラス等を含めた均一な格子状構造物に対して，cosserat 連続体力学を用いた連続体解析理論の適用が種々研究されている。

格子状骨組(ラーメン)を対象とした場合には，couple stress を考えた一般連続体として扱わねばならない。

h, l でかこまれた部分を要素と考え，そこに作用する力，曲げモーメントを示したものが図-3である。

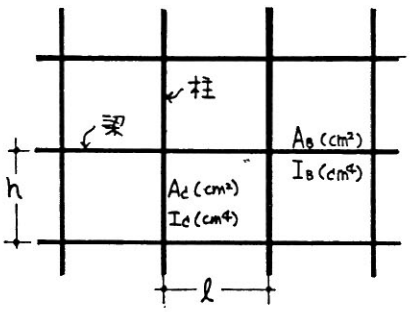


図-2

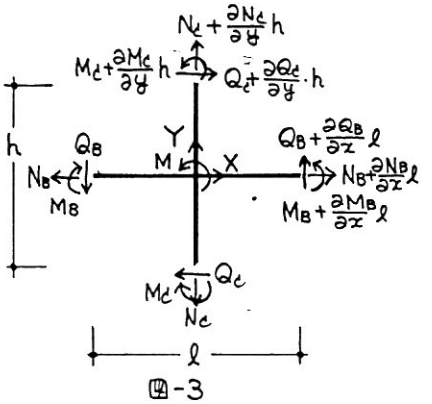


図-3

この時，等価応力を

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_x = \dfrac{N_B}{h} & \bar{\tau}_{xy} = \dfrac{Q_B}{h} & \bar{\mu}_x = \dfrac{M_B}{h} \quad \cdots (1) \\ \bar{\sigma}_y = \dfrac{N_c}{l} & \bar{\tau}_{yx} = \dfrac{Q_c}{l} & \bar{\mu}_y = \dfrac{M_c}{l} \quad \cdots (2) \end{cases}$$

とすると，釣合方程式は，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + X = 0 & \cdots (3) \\ \dfrac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + Y = 0 & \cdots (4) \\ \bar{\tau}_{xy} - \bar{\tau}_{yx} + \dfrac{\partial \bar{\mu}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{\mu}_y}{\partial y} + M = 0 & \cdots (5) \end{cases} \qquad (X, Y, M \text{ は body force})$$

となる。 水平荷重を受ける骨組を対象とすると，要素に働く曲げモーメントの和は0の仮定が近似的に満足される。 すなわち，$M=0$, $\frac{\partial \bar{\mu}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\mu}_y}{\partial y} = 0$, $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx}$ と仮定すれば，(5) 式は常に満足されることになる。

この時の，応力～歪関係式は，要素部材の曲げ変形，節点の回転を考慮して，

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_x = \dfrac{EA_B}{2h} \cdot \varepsilon_x = \bar{E}_1 \varepsilon_x \quad , \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} & \cdots\cdots (6) \\ \bar{\sigma}_y = \dfrac{EA_c}{2l} \cdot \varepsilon_y = \bar{E}_2 \varepsilon_y \quad , \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \cdots\cdots (7) \\ \bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = \dfrac{12}{hl} \cdot \dfrac{I_c \cdot I_B}{I_c l + I_B h} \cdot \gamma_{xy} = \bar{G} \cdot \gamma_{xy} \quad , \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} & \cdots\cdots (8) \end{cases}$$

となる。 (3), (4), (6), (7), (8) は，平面応力場の異方性板の釣合方程式，応力～歪関係式に一致し，通常の F.E.M. の手法を用いて容易に解くことが出来る。

なお，建築物においては，床面に剛性の高いコンクリート床板が水平 stiffner として

存在するから，$\bar{E}_1=\infty$ として $\bar{\sigma}_x$ の項を省略する。

また，(8)式の $\bar{G}$ は，柱・梁材の曲げ変形のみを考えた場合であるが，部材のせん断変形，接合部（シャーパネル）変形を考慮する場合には，等価な剛性値（$\bar{G}$）を直接計算してやればよい。

2. Finite Element Method を用いた平面要素の剛性 matrix 作成.

前節で述べたように，格子状骨組を異方性板と見なして，t を板厚とすると，

等価応力　$\bar{\sigma}_x(=0)$，$\bar{\sigma}_y=\sigma_y t$，$\bar{\tau}_{xy}=\tau_{xy}t$

等価剛性　$\bar{E}_1(=\infty)$，$\bar{E}_2=E_2 t$，$\bar{G}=Gt$

として，板定数が定まる。このような連続体に対しての平面応力解析は，中点を持った8節点長方形要素を用いた F.E.M. により行う。この時の FEM 要素分割は通常の手法により自由度，応力分布状態を考慮して骨組のピッチとは無関係に適当に決めることが出来る。

2.1. 応力－歪の関係（D matrix）

$$\begin{Bmatrix}\sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E_2 & 0\\ 0 & G\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad \text{-----(9)}$$

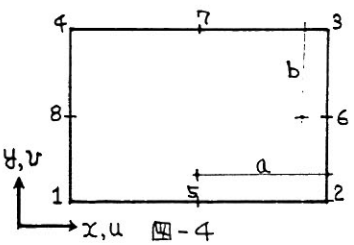
2.2. 変位関数（N）

$$\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & xy^2 & xy^2 & 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^2y & xy^2\end{bmatrix}\{d_{1\sim16}\} \text{----(10)}$$

2.3. 節点変位（u v）と未定係数（α）との関係

$$\left.\begin{aligned}u&=(u_1\,u_2\,u_3\,u_4\,u_5\,u_6\,u_7\,u_8)^T\\ v&=(v_1\,v_2\,v_3\,v_4\,v_5\,v_6\,v_7\,v_8)^T\end{aligned}\right\}\text{---(11)}$$

$$\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & C\end{bmatrix}\{\alpha\} \qquad \text{---(12)}$$



図－4

但し C は(10)式に1～8の x,y 座標を代入したもの

2.4. 変形と歪の関係

$\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}$ であるから $(\varepsilon_y\,\gamma_{xy})^T$ は(13)式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q\end{bmatrix}\{\alpha\} \qquad \text{----(13)}$$

但し Q は(11)式を微分したものである。

2.5. 剛性 matrix の計算

以上，求めた C，Q，D を用いて剛性 matrix K は(14)式によって計算できる。

$$K=\begin{bmatrix}C^{-1} & 0\\ 0 & C^{-1}\end{bmatrix}^T\int_V[Q]^T[D][Q]\,dV\begin{bmatrix}C^{-1} & 0\\ 0 & C^{-1}\end{bmatrix} \qquad \text{----(14)}$$

3. 平面要素を組み立て立体化する解法について

3.1. 基本的な考え方

建築物の各架構面が Box-Girder を構成していると見なしてよく，建物の床は剛な Stiffner を形成していると考える。 図5-dの如くモデル化された架構に対し，Box-Girder としての中心軸 z-z' を想定する。 平面架構の各面の節点，中点の各層位置に対応して z-z' 軸上に節点をとり，自由度として U, V, θ_z を考える。 これに対して建物に働く外力（地震，風）はこの中心軸上の点に対して X, Y, M_z を与える。

床面を無限に剛な Stiffner と考えた為に，Box-Girder の各面の面内力の水平成分は Stiffner を介して連続的にやりとりされていることになる。

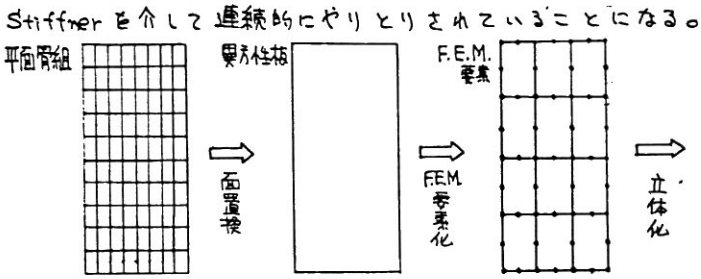
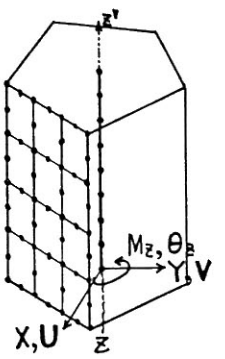


図-5



3.2 立体化に伴う element 剛性 matrix の変換.

各面の水平変位 u_{local} は z-z' 軸上の同一層の変位 U, V, θ_z によって(15)で表わされる。 (図-6)

$$u_{local} = U\cos\theta + V\sin\theta + l\theta_z \qquad \text{-----(15)}$$

各面の鉛直変位 v_{local} は z-z' 軸上の変位とは無関係の為，変換は必要ない。

変換 matrix **T** を(16)式で表わされるようなものとして導入すると element 剛性 matrix は立体化されて $\mathbf{K}^*$ として(17)式で計算できる。

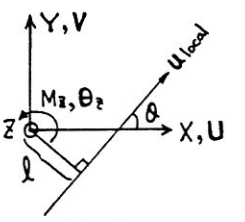
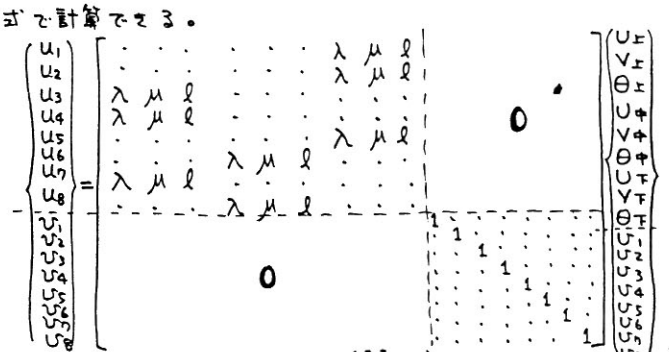


図-6



$$\text{又は} \quad \begin{Bmatrix} u_{local} \\ v_{local} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ \theta_z \\ v_{local} \end{Bmatrix} \qquad \text{------(16')}$$

但し $\lambda = \cos\theta$, $\mu = \sin\theta$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K}\, \mathbf{T} \qquad \text{-----(17)}$$

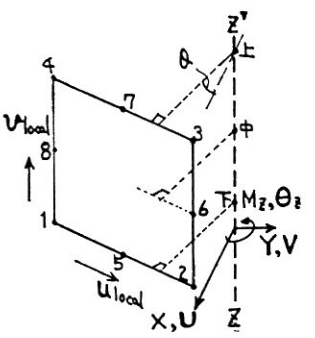


図-7

3.3 全体の解法

全体の解法は通常の matrix 変位法に基ずいて行い $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \theta_z, \upsilon_{local}$ を連立方程式を解いて求める。

3.4 各面の応力，歪の計算

全体の $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \theta_z, \upsilon_{local}$ が計算されると，(16)式の変換 matrix により u_{local} υ_{local} を求めることが出来る。 これを用いて応力，歪は簡単に計算できる。

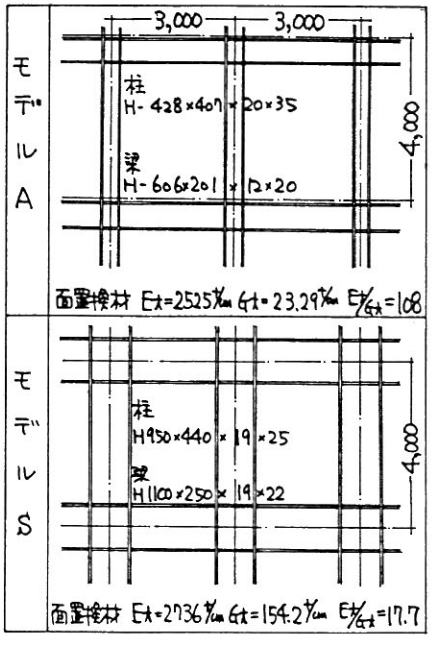
4 解析例

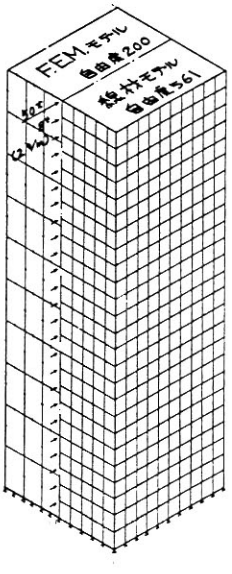
4.1 解析モデル

解析対象として，正方形平面 30m×30m（10スパン×10スパン），高さ 100m（25層－図-8），200m（50層－図-9）の一様な柱梁断面をした建家をとり上げた。 同図中，左半分の線材骨組モデルと左半分の F.E.M.モデル（面要素モデル）とを各々に計算し面置換の精度，応力分布を検討する。

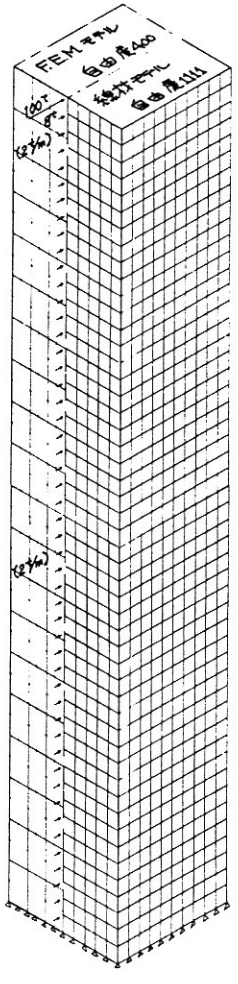
また，使用した柱，梁断面は，表-1に示した剛性の異る2種のモデル（A および S）により，せん断剛性の差による応力分布を検討する。 外力としては，頂部 50t と等分布 2t/m（8t/層）の水平荷重を与える。

表－1 柱・梁断面





図－8



図－9

4.2　モデルA，100mの場合

せん断剛性(Gt)の小さいモデルAにつき、100の場合の線材モデルとF.E.M.モデルを比較する。

図-10は，最下層(H=2m)と中央(H=66m)での応力を比較して示す。

図-11は F.E.M.モデルの変形状態と線材モデルの変形量を示す。

図-12,13は，F.E.M.モデルの $\sigma_y t$ (軸方向力)，$\tau_{xy} t$ (せん断力) の分布を示す。

これ等より，隅角部での応力を除きF.E.M.モデルの精度は誤差8%程度で良好と言える。また，$\sigma_y t$ の分布より，web, flange 面に shear-lag が生じ複雑な応力分布を示していることがうかがわれる。

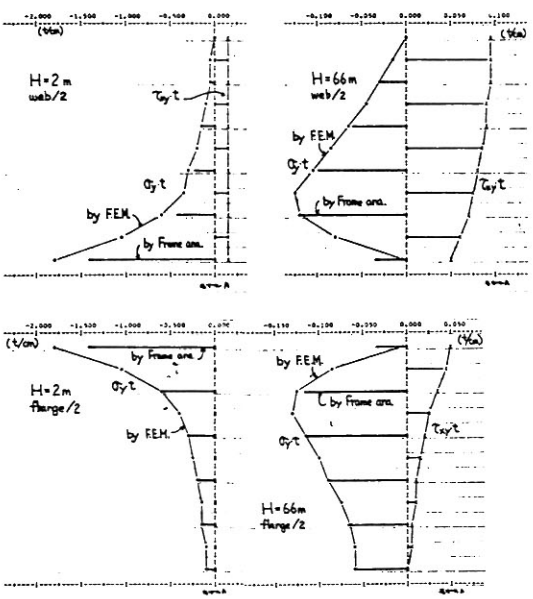


図-10　骨組解析と面解析の比較

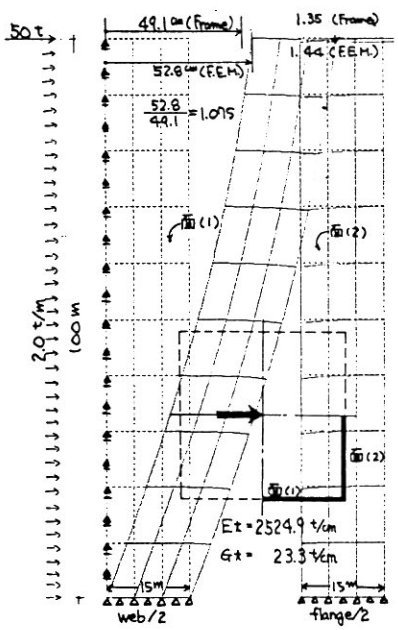


図-11　変形状態

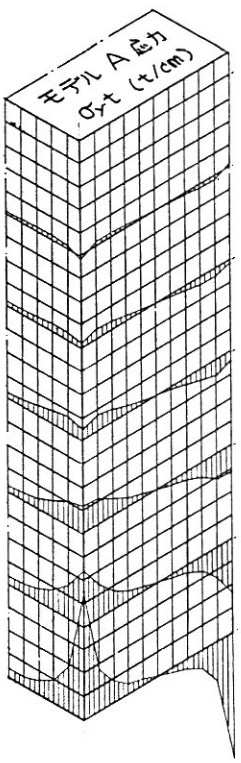


図-12 $\sigma_y t$

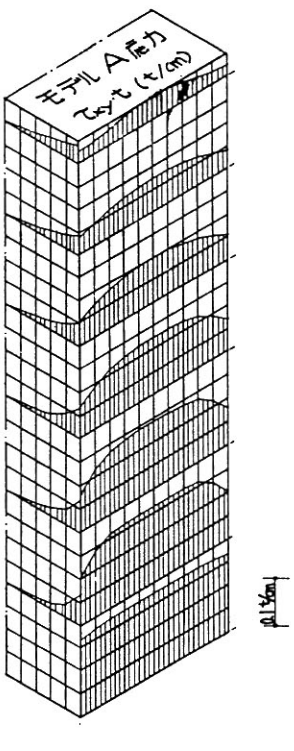


図-13 $\tau_{xy} t$

4.3 モデルS，100mの場合

せん断剛性(G_t)の大きいモデルSにつき，100mの場合の線材モデルとF.E.M.モデルを比較する。

図-14に，最下層(H=2m)と中央(H=66m)での応力を比較して示す。

図-15は，F.E.M.モデルの変形状態と線材モデルの変形量を示す。

図-16,17は，F.E.M.モデルのσ_{yt}，τ_{xyt}の分布を示す。

これ等より，G_tが大きくなったため応力勾配がゆるやかになり，モデルAに比しshear-lagも大きくないことが分る。このため支圧，応力の精度も上り，誤差も3%程度と小さくなっている。

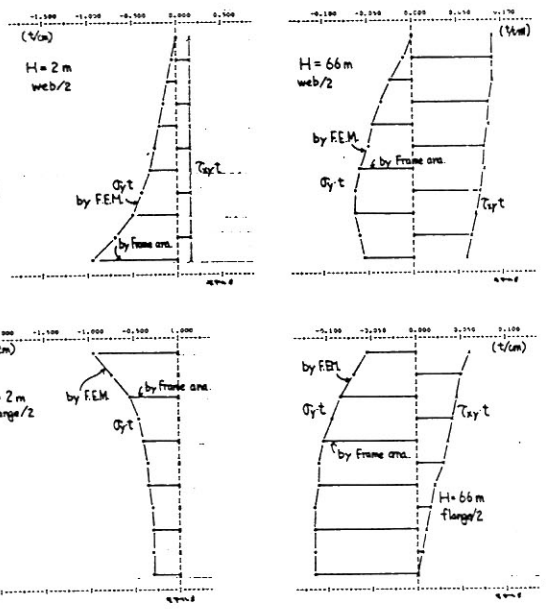


図-14 骨組解析と面解析の比較

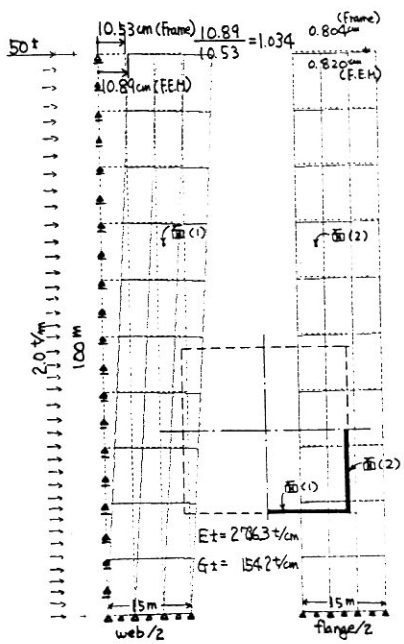


図-15 変形状態

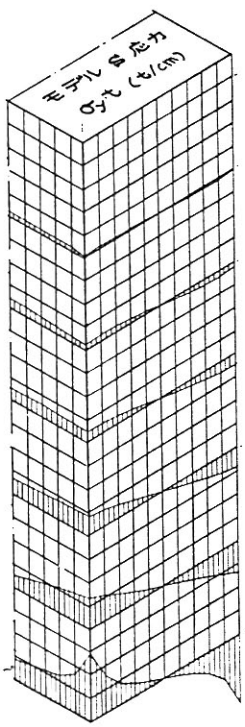


図-16 σ_{yt}

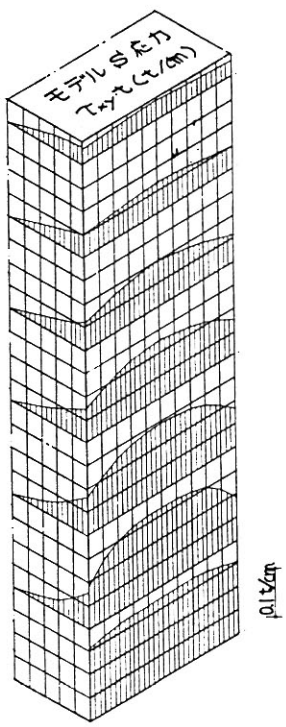


図-17 τ_{xyt}

4.4　100mモデルと200mモデルとの比較

モデルSについて100m(25層)と200m(50層)のF.E.M.による解析結果を比較した。(図-18, 図-19 参照)　100mのモデルでは，建物はスパン：成＝3:1の短い片持梁となる為，下部固定端，上部自由端の影響が大きく現われshear-lagによる応力が支配的である。　200mのモデルでは，中央部においては平面保持の梁の応力分布形を示しており，建物を単純な曲げ梁と見てよいと思われる。　しかし，上部，下部の境界においては応力が乱されている。

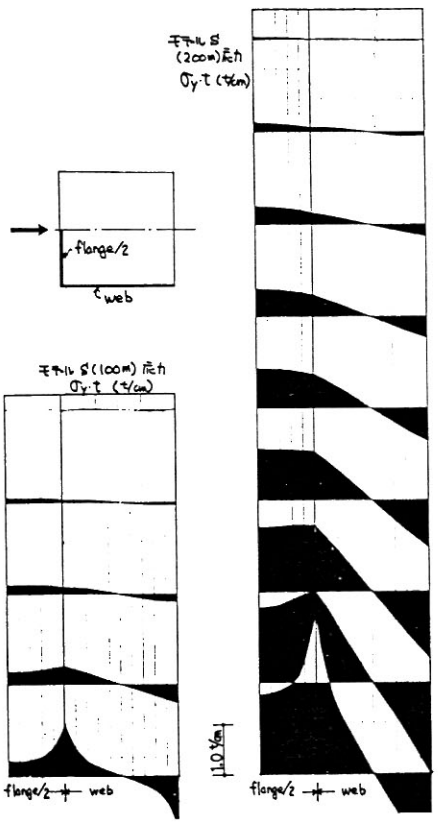


図-18　軸方向応力

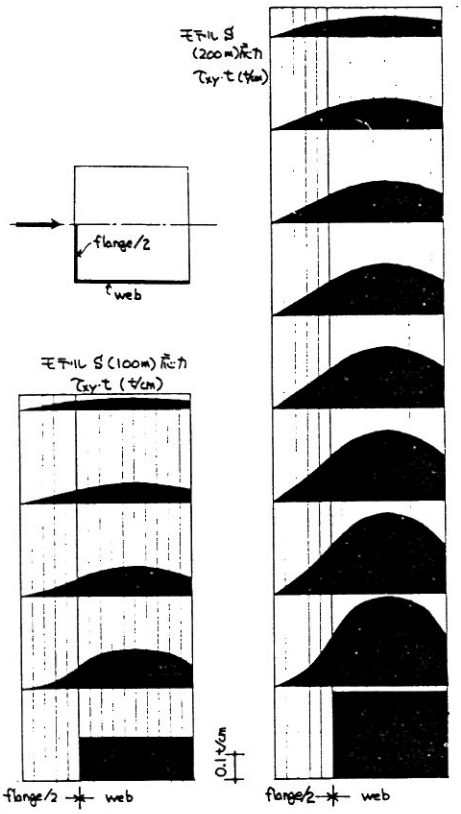


図-19　せん断応力

おわりに

以上の如く，格子状骨組の面置換法は，均一な骨組においては精度よく全体架構の性状を表わすことが出来，骨組の剛性をEA, GAという簡便な量で評価出来る利点がある。　しかしながら，曲げモーメント項を省略している為境界条件や部材断面の変化等に対する追随性が悪く，さらに解の精度も推定し難い。　この点を取り除く為には，曲げモーメント項を考慮に入れた場合の解法を次の段階として考えていきたい。