日本建築学会・電子計算機利用委員会
第6回電子計算機利用シンポジウム 1984

応力－歪関係の中に負こう配を有する材料によって作られた構造物の解析法

正会員　黒正清治＊　同　和田　章＊＊　同 ○坂田弘安＊＊＊

1．序

コンクリートの一軸圧縮試験に見られる応力－歪関係の負勾配，トラス部材の軸力－変位関係に見られる負勾配など建築構造物の力学的挙動を把握し数値解析的にとらえるためには，この負勾配の取り扱い方を考える必要がある。（図1，図2）

ここで図3に示すような特性を有する3つのバネ S_1，S_2，S_3 を図4に示すように連結した2つのモデルを考える。①に示す並列モデルにおいては，水平に一定の Δ なる強制変位を与えると増分荷重 ΔP は3つのバネの各々の反力の和として求めることができる。これはコンクリート断面における $\sigma-\varepsilon$ 関係から $M-\varphi$ 関係を求める場合に似ている。ところが②に示す直列モデルにおいては，Ⓐ点に水平に Δ なる強制変位を与えると節点Ⓑ，Ⓒの変位は不定となり，よって増分荷重 ΔP も不定となってしまう。

また一般に，構造体の増分ポテンシャルエネルギー $\Delta\Pi$ は

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{K}\cdot\Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^T\mathbf{f}_{in} - \Delta\mathbf{u}^T\mathbf{f}_{ex} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$\Delta\mathbf{u}$：構造体の増分変位ベクトル

$\Delta\mathbf{u}^T$：$\Delta\mathbf{u}$ の転置ベクトル

$\mathbf{f}_{in}$：構造体の内部応力に釣合うために必要な節点内力ベクトル

$\mathbf{f}_{ex}$：作用する全外力ベクトル

$\mathbf{K}$：構造体の剛性マトリックス

と表わせ，この式にポテンシャルエネルギーの停留原理を用いると

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}_{in} - \mathbf{f}_{ex} = 0$$

なる式が得られる。しかしこの時 $\Delta\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{K}\cdot\Delta\mathbf{u}$ は正の定符号でなくてはならないので，$\mathbf{K}$ のあらゆる小行列式が正でなければならない。つまり剛性マトリックスに応力－歪関係の負勾配をそのまま取り込むことはできないことがわかる。

本論文では，負勾配の取り扱いとして従来行なわれてきた応力解除の手法の妥当性とその意味を見直し，これを用いた数値解析例を示す。

2．コンクリートの応力－歪関係のモデル化について

コンクリートの一軸圧縮試験で得られる応力－歪関係には非線形性と負勾配が見られる。しかしコンクリートをミクロにとらえるとその1つ1つの部分（要素）の応力－歪関係には負勾配は存在せず，ある歪量を越えるとその部分（要素）が破壊するものと考えることができるであろう。つまり図5に示すような応力－歪関係を有するものと考えられる。各々異なった（K, ε_y, ε_u）を有する構成要素が寄り集まって図1のような応力－歪関係を形づくるものと思われる。有限個の構成要素により形づくられる応力－歪関係は図6に示すようになる。図6は負勾配領域において応力を階段状に解除する従来の方法の意味とその妥当性

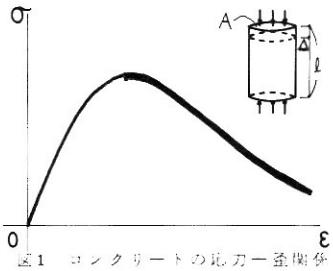


図1　コンクリートの応力－歪関係

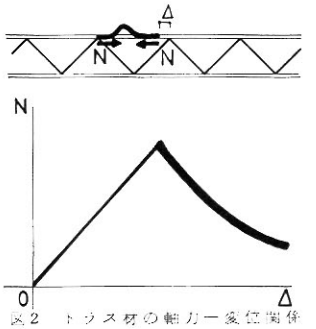


図2　トラス材の軸力－変位関係

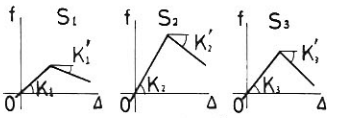


図3　バネの特性

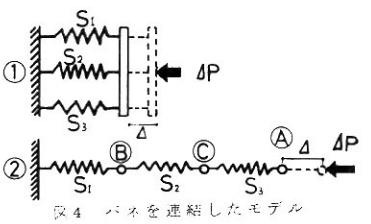


図4　バネを連結したモデル

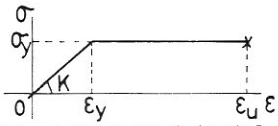


図5　ミクロなコンクリートの応力－歪関係

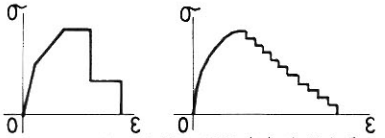


図6　構成要素の組み合わせによる応力－歪関係

を示していると言える。

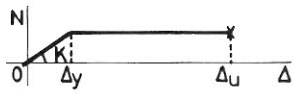


表1　バネの特性

Member	K(kg/mm)	Δy(mm)	Δu(mm)
1-2	10	10.00	10
	20	5.00	14
	30	3.30	18
	40	2.50	22
	50	2.00	26
	60	1.70	30
	70	1.40	34
	80	1.25	38
	90	1.10	42
	100	1.00	46
2-3	10	9.50	10
	20	4.70	14
	30	3.16	18
	40	2.40	22
	50	1.90	26
	60	1.60	30
	70	1.35	34
	80	1.20	38
	90	1.05	42
	100	0.95	46
3-4	10	9.00	10
	20	4.50	14
	30	3.18	18
	40	2.25	22
	50	1.80	26
	60	1.50	30
	70	1.30	34
	80	1.10	38
	90	1.00	42
	100	0.90	46

3．直列バネモデル

2．で述べた理論に基づき、図7に示すような3自由度の直列バネモデルの解析結果を示す。　4節点で節点間には各々10個ずつのバネがあり、各々のバネは表1に示すような性質を持つものとする。　①節点は固定とし、④節点に強制変位を与える。　④の変位と荷重の関係を図8に示し、②の変位と荷重の関係および③の変位と荷重の関係をそれぞれ図9,10に示す。　図8よりこのモデルで負勾配をとらえられることがわかる。　また3-4要素が壊れだすと②,③節点の変位が戻りだしている様子が現われている。

このような簡単なモデルを解いてもわかるように、応力－歪関係の負勾配領域において応力を階段状に解除する方法は妥当であると思われる。

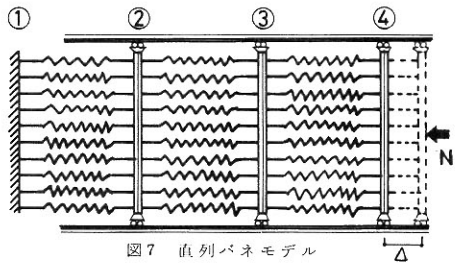


図7　直列バネモデル

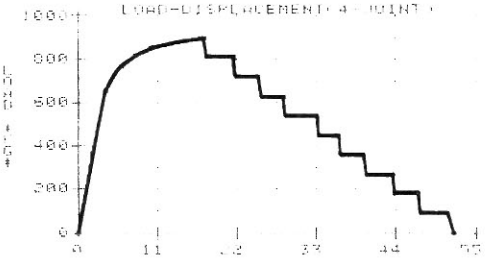


図8　荷重－変位関係（節点4）

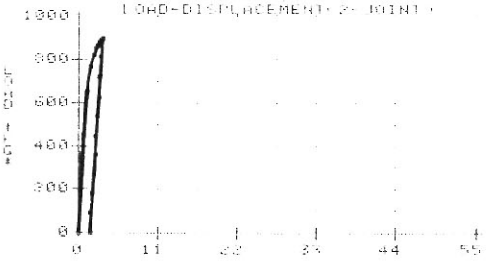


図9　荷重－変位関係（節点2）

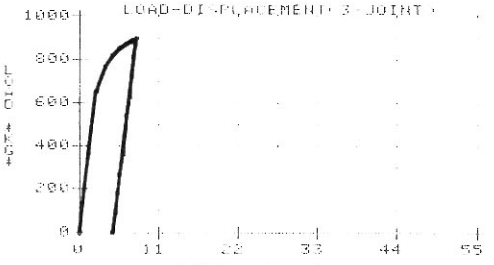


図10　荷重－変位関係（節点3）

4．解析手法

数値解析例として鉄筋コンクリート部材の解析例を示すがその仮定および解析手法を以下に述べる。

a．部材はすべて線材として扱う。

b．鉄筋とコンクリートの間にはすべりを考慮しているので、鉄筋に関する平面保持は成り立たないが、コンクリート断面に関する平面保持は成立するものとする。

c．軸方向変形および曲げ変形を考慮し、せん断変形は無視する。

d．鉄筋の応力－歪関係、コンクリートの応力－歪関係および主筋とコンクリートの付着を表わすための付着応力－すべり関係はそれぞれ図11，図12，図13に示すものを用いる。コンクリートの応力－歪関係の負勾配の応力解除は100ステップで行なう。

e．断面の分割は、フープ・スターラップ等によって拘束された部分のコンクリートとそうでない部分のコンク

ートを図14に示すように分割する。

4．断面内の応力度・歪度に関しては断面の単位分割中で一定とする。

4－1．解析の概要

本論文で用いる非線形解析法は、ポテンシャルエネルギー増分の停留原理に基づいた初期応力法と呼ばれる増分法である。

ポテンシャルエネルギー増分は、変位増分の二次形式により表わされた歪エネルギー増分と外力を受けている部分が変位することによって失う外力のポテンシャルエネルギーの差として表わす。さらに二次形式の変分原理を応用することによって増分形の方程式を導き、Step by step 法と Iteration 法によって解いてゆく。

4－2．変位増分が生じた時のポテンシャルエネルギー増分

変位増分が生じた時のポテンシャルエネルギー増分$\Delta\Pi$はΔuの二次形式によって(1)式のように表わすことができる。

4－3．二次形式の変分原理の応用

(1)式を二次形式の変分原理を用いて、任意の$\delta\Delta u$に対して$\delta\Delta\Pi=0$とおくと、

$$\delta\Delta\Pi=\frac{1}{2}(\Delta u+\delta\Delta u)^T\cdot K\cdot(\Delta u+\delta\Delta u)+(\Delta u+\delta\Delta u)^T(f_{in}-f_{ex})-\frac{1}{2}\Delta u^T\cdot K\cdot\Delta u-\Delta u(f_{in}-f_{ex})$$

$$=\delta\Delta u^T(K\Delta u+f_{in}-f_{ex})+\delta\Delta u^T\cdot K\cdot\delta\Delta u \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$\delta\Delta u$に関する二次の項$\delta\Delta u^T\cdot K\cdot\delta\Delta u>0$の時この系はエネルギー的に安定し、よって(3)式の解Δuがこの系が釣合うための増分変位となる。

$$K\cdot\Delta u+f_{in}-f_{ex}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

4－4．フローチャート

(3)式を用いて増分問を線形に置き換えながらΔuを求める。このΔuによって構造体に生じる歪増分を増分前の各要素の座標系において計算し、応力もそれらの歪増分に応じて修正する。これらの処理がすべての要素にわたって修了した後、各要素を修正された歪と応力を保持したまま要素の軸方向の回転も考慮して、各要素の形としてのたわみを取り去った直線要素として変形後の位置へ移動する。

上記の処理によって計算を1 Step進ませることができる。しかしΔuだけ変形が進んだ状態では降伏域の進行、要素の位置の変化および回転等によって内力f_{in}と外力f_{ex}とは必らずしも釣合っていない。従って内力と外力が釣合うまで繰り返して計算するIterationが必要である。

4－5．増分変位と増分歪

増分変形前の要素の両端中央(i,j)を通り原点を要素の中央に置いた軸としてx軸を定め、この軸に直交する方向にy軸を定める。また座標x，y軸に対応した方向の変位増分を各々Δu，Δvとして変形後の材軸がx軸となす角度の増分を$\Delta\theta$，鉄筋とコンクリートの間のすべり増分をΔSとする。(図15) すると要素内部の任意点(x,y)における要素の軸方向歪増分$\Delta\varepsilon_x$は大変形を考慮して次のようにコンクリートと鉄筋に分けて表わすことができる。

- コンクリート　$\Delta_c\varepsilon_x=\dfrac{d\Delta u}{dx}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\Delta v}{dx}\right)^2-\dfrac{d^2\Delta v}{dx^2}y$ ------- (4)
- 鉄　筋　$\Delta_s\varepsilon_x=\dfrac{d\Delta u}{dx}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\Delta v}{dx}\right)^2-\dfrac{d^2\Delta v}{dx^2}y-\dfrac{d\Delta S}{dx}$ ------- (5)

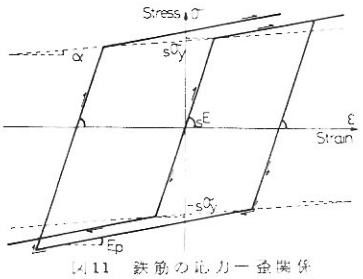


図11　鉄筋の応力－歪関係

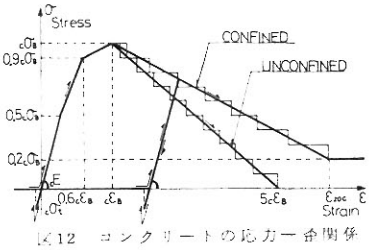


図12　コンクリートの応力－歪関係

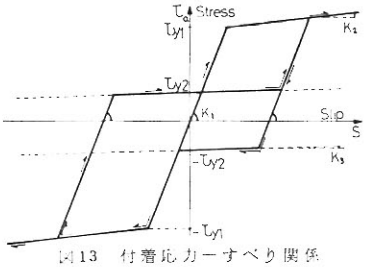


図13　付着応力－すべり関係

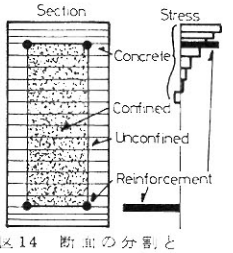


図14　断面の分割と応力度分布

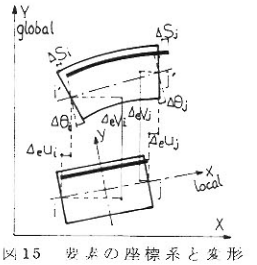


図15　要素の座標系と変形

5．数値解析例

2種類の鉄筋コンクリート部材の弾塑性解析を行う。各々の解析モデル1，2を図16，17に示す。2つのモデルの違いは圧縮鉄筋の有無である。材軸方向に60要素に分割し断面は図14に示すように34に層状分割する。鉄筋は材軸方向全長にわたりコンクリートとボンドで結合しコンクリートは図16,17の①,③でu,v,θ方向の移動回転を拘束する。荷重は⑥に下向きに作用させる。諸定数は表2に示す値を用いる。なお、1-2部材のみ付着剛性は常に弾性とする。

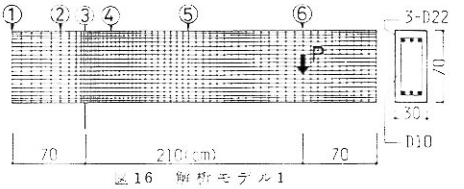


図16 解析モデル1

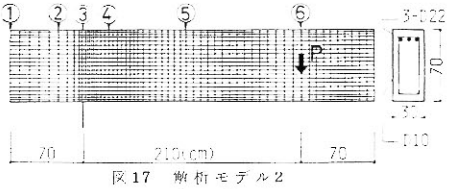


図17 解析モデル2

表2 諸定数

s_E	= 2100	t/cm²	c_E	= 185	t/cm²
E_p	= 21	t/cm²	$c\sigma_b$	= 210	kg/cm²
α	= 10.5	t/cm²	$c\varepsilon_b$	= 0.002	
$s\sigma_y$	= 3850	kg/cm²	K_1	= 4	t/cm³
a_t	= 11.61	cm²(3本)	K_2	= 0.2	t/cm³
ψ	= 21.0	cm(〃)	K_3	= 0.05	t/cm³
a_w	= 1.43	cm²	τ_{y1}	= 40	kg/cm²
◎	= 15	cm	τ_{y2}	= 7	kg/cm²

（モデル1） 荷重Pと⑥における鉛直変位vの関係を図18に示す。ⓒで③における圧縮縁コンクリートが負勾配に入りだし荷重が下がりだしている。⑥における変位v=6.6mm，荷重P=11.17 ton Ⓑでの変形図，ひびわれ分布図，引張鉄筋の応力度・付着応力度の材軸方向の分布図，断面の応力度分布図を図19に示す。また⑥における変位v=10.4mm，荷重P=11.845 ton．Ⓐでの主な部材のコンクリートのひずみ度が前ステップからどのように変化しているかを図20に示す。圧縮側のコンクリートが負勾配に入ると残りの要素のひずみが戻っている様子がわかる。

（モデル2） 荷重Pと⑥における鉛直変位vの関係を図21に示す。圧縮鉄筋がないためモデル1に比べコンクリートが負勾配に入った時の影響が強く、荷重が大きく落ちている。⑥における変位v=6.6mm，荷重P=10.65 ton Ⓑでの変形図，ひび割れ分布図，引張鉄筋の応力度・付着応力度の材軸方向の分布図，断面の応力度分布図を図22に示す。また⑥における変位v=9.4mm，荷重P=12.507 ton Ⓐでの主な部材のコンクリートのひずみ度が1つ前のス

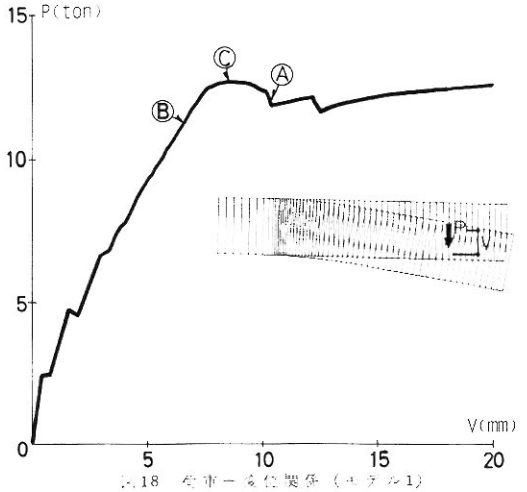


図18 荷重-変位関係（モデル1）

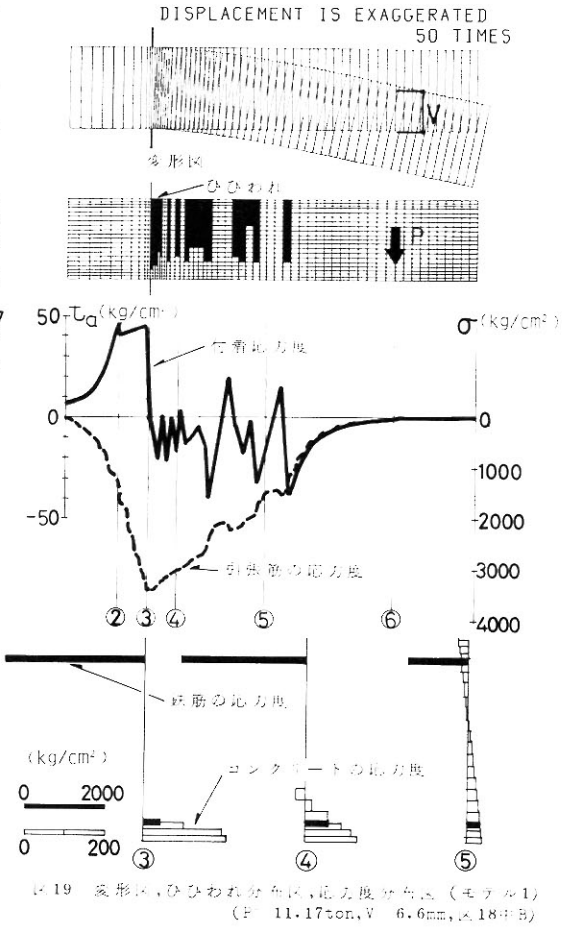


図19 変形図，ひびわれ分布図，応力度分布図（モデル1）
（P 11.17ton, V 6.6mm, 図18中B）

テップからどのように変化しているかを図23に示す。

6．結

応力－歪関係の負勾配の処理法として応力解除の手法を取り上げその意味と応用を示した。応力解除の手法は妥当だと言える。なお本解析には東京工業大学総合情報処理センターHITAC-M280Hを使用した。

謝辞　鉄筋コンクリート部材の解析法に関し有益な御指導を戴いた名工大滝口克己助教授，福井大林静雄講師に深く感謝致します。

参考文献 (1)前川，岡村「弾塑性破壊モデルに基づくコンクリートの平面応力構成則」コンクリート工学　1983年 5月
(2)野口，長沼「繰返し荷重を受けるRC部材のせん断解析モデル」RC構造のせん断耐力について　1983年10月
(3)森田，角「繰返し荷重下における鉄筋とコンクリート間の付着特性に関する研究」日本建築学会論文報告集　昭和50年3月
(4)吉田，黒正，林，小山内「異形鉄筋とコンクリートの付着に関する基礎的実験(その1)」日本建築学会大会　昭和55年9月

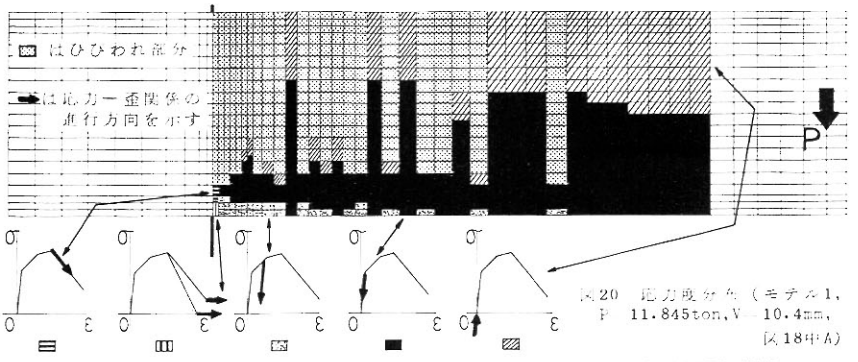
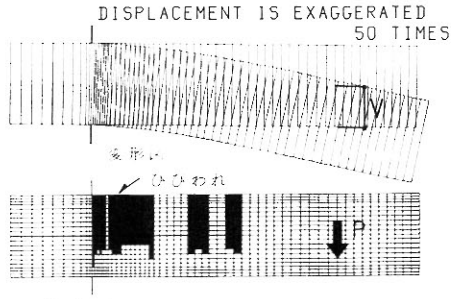


図20　応力度分布（モデル1，P　11.845ton，V　10.4mm，図18中A）



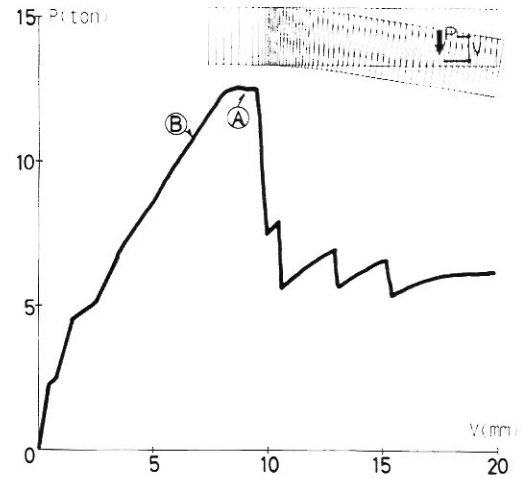
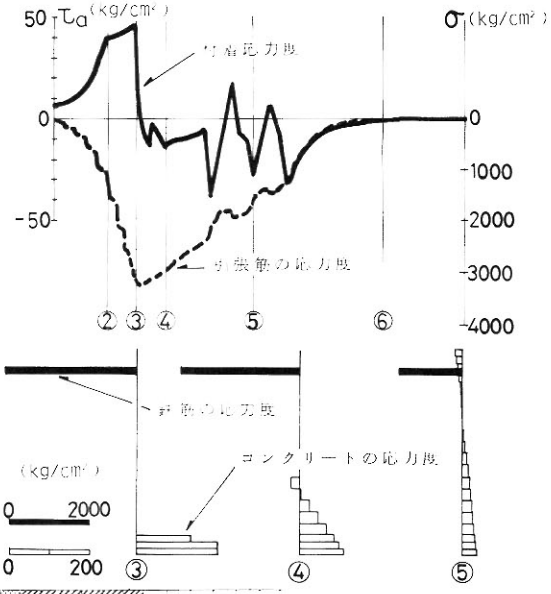


図21　荷重－変位関係（モデル2）



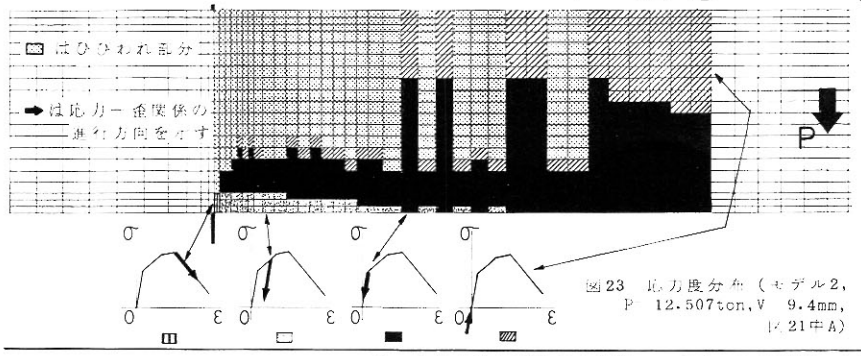


図23　応力度分布（モデル2，P　12.507ton，V　9.4mm，図21中A）

▲図22　変形図，ひびわれ分布図，応力度分布図（モデル2）（P　10.65ton，V　6.6mm，図21中B）

※　東京工業大学教授・工博　　※※　同助教授・工博　　※※※　同大学院生

NONLINEAR STRUCTURAL ANALYSIS METHOD FOR THE STRUCTURES MADE OF MATERIALS HAVING NEGATIVE MODULUS IN STRESS-STRAIN RELATIONSHIP

Seiji Kokusho *1
Akira Wada *2
Hiroyasu Sakata *3

In order to analyze the mechanical behaviour of structures, such as the negative modulus seen in the stress-strain relationship in uniaxial compression tests on concrete, or of that seen in the relationship of axial force and displacement of truss members, etc., how such a negative modulus should be dealt with must be considered.

In this paper, the validity and meaning of the method of stress release conventionally used as a negative modulus processing method are again looked at, and the method is applied to the elasto-plastic analysis of reinforced concrete members.

*1 : Professor, Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.
*2 : Associate Professor, Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.
*3 : Graduate Student, Tokyo Institute of Technology