昭和48年6月6日～8日
日本鋼構造協会第7回大会研究集会
マトリックス構造解析法研究発表論文集

3次元有限要素法の実用的応用

Practical Application of 3 dimensional F.E.M.

○和田 章 *
岩田 衛 **

§.1 序

棒、板、シェルのように物体のある系統の寸法が、他の寸法に比して小さい場合や軸対称とみなしてよい場合などには、省略化や簡単化が行なわれ、適当な1次元近似および2次元近似で解を得ることができる。しかし、実際的な幾つかの問題はこのような近似ができなく、3次元問題として考えなければならない。

さて、3次元有限要素を用いた応力解析で、意味のある結果を得るには、非常に多くの要素を必要とし、ときには大きな電子計算機でも容量と速度の点で足りない場合がある。また、2次元問題では比較的楽に行なわれていたデータの読込み、計算結果の表現の仕方が急に難しくなる。

本論はこの観点から三次元有限要素法の実用的プログラム、すなわち、簡単な読込み、分かりやすい計算結果の表現、容量の節約および計算時間の高速化がなされるプログラムについて例題に沿いながらふれる。

§.2 3次元有限要素

用いる要素は8節点をもつ直方体要素(Fig.1)と6面体要素(Fig.2)、6節点をもつ3角柱要素(Fig.3)、4節点をもつ4面体要素(Fig.4)とし、これらの組合せによって解析モデルをつくる。

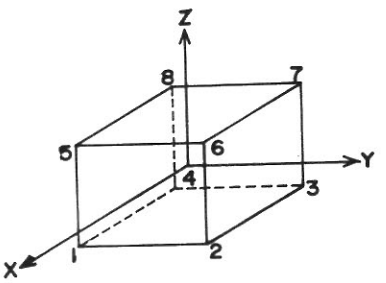


Fig.1

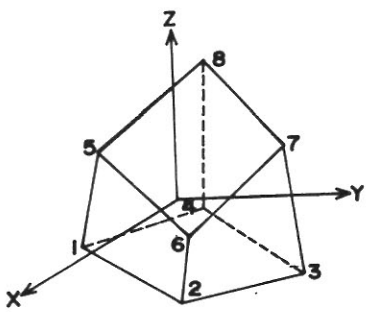


Fig.2

今、x方向変位、y方向変位、z方向変位がそれぞれu、v、wで表わされたとき、歪マトリクスは次のように書くことができる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(1)$$

*株式会社日建設計 **東京工業大学院生

応力マトリクスは(2)式で表わされる。

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} \qquad \text{-----(2)}$$

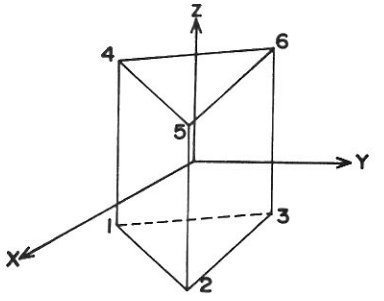


Fig.3

材料が等方性であるとき $[D]$ マトリクスは縦弾性係数を E、ポアッソン比を ν として(3)式となる。

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & \text{対称} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

----- (3)

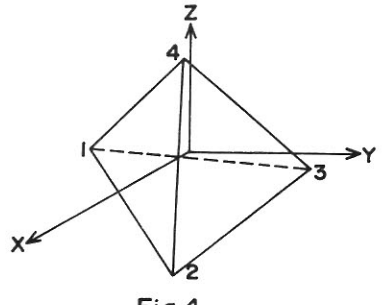


Fig.4

これらの関係から要素の剛性マトリクスを求めることができる。

§.3 例題

柱と梁の接合部によく見られる(Fig.5)のような部分の解析を取上げる。この問題の2次元近似はすることができない。端部を図のごとく Z 軸方向に一様に強制変形させたとき、接合部には応力の不均一が生じ、ときとして応力集中が起こる。また、K形付合わせ溶接の脚長およびのど厚の大きさの程度によって、この応力の不均一は変化するので、2種類のK形付合わせ溶接について解くとする。実際の数値解析では対称条件より 1/4 の部分について考えればよい。各寸法は(Fig.5)のように与え、脚長は 1 cm と 2 cm の場合を計算し、両者を比較する。

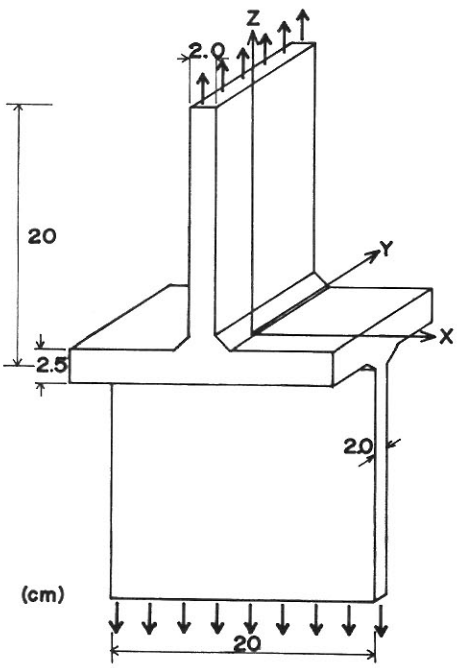


Fig.5

§.4 読込み

インプット・データは連立方程式を解くために必要な情報をできるだけ簡単に与えなければならない。(Fig. 6) のモデル化に従って各要素のデータが与えられる。読込みデータは次の種類だけである。

i 材料の性質

材種番号で区別し、各材種番号ごとにヤング係数とポアッソン比を与える。

ii 要素の性質

要素種類番号で区別し、各要素種類番号ごとに6面体要素、4面体要素、3角柱要素の区別番号と要素の大きさおよび材種番号を与える。

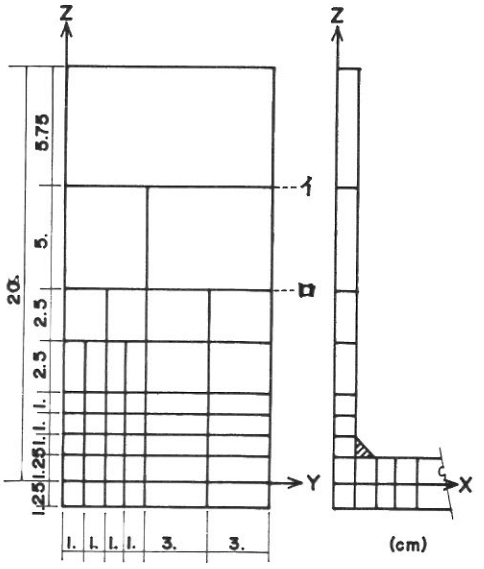


Fig.6

iii 中間点

まわりの節点との従属関係によって変形が決まる中間点を与える。(Fig. 6) においても明らかなようにモデルの要素の大きさの変化が自由に行なえる。

IV 6面体(直方体)要素の構成点

6面体の各要素種類ごとにモデルの各断面の節点番号の分布状態を与える。このとき自動的に6面体の構成点を拾いだす。

V 4面体、3角柱要素の構成点

各要素種類ごとの構成点を与える。

VI 境界条件

節点の固定条件と荷重条件を与え、同じ条件の節点番号を列挙する。

§.5 計算過程

連立方程式の解法は共役傾斜法(Conjugate Gradients Method)を用いる。このとき、モデル全体の剛性マトリクスをつくることは計算機の容量上不可能であるので、要素ごとの剛性マトリクスのみを記憶しておき、全体剛性マトリクスとの位置関係を調べながら要素数でループさせて計算を行なう。(Fig. 7)

C.G.法のループ回数は残差ベクトルの絶対値の和の収束状況から判断してきめる。

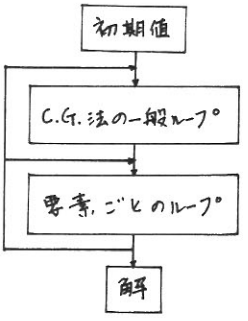


Fig.7

§.6 プログラム順序

プログラムのブロックチャートは(Fig. 8) であり、各ブロックごとの計算は完全に独立して行なわれる。

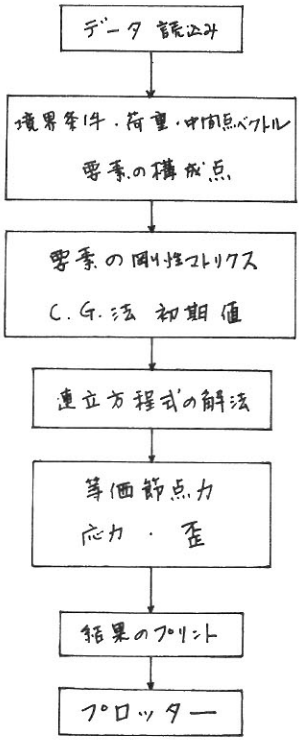


Fig.8

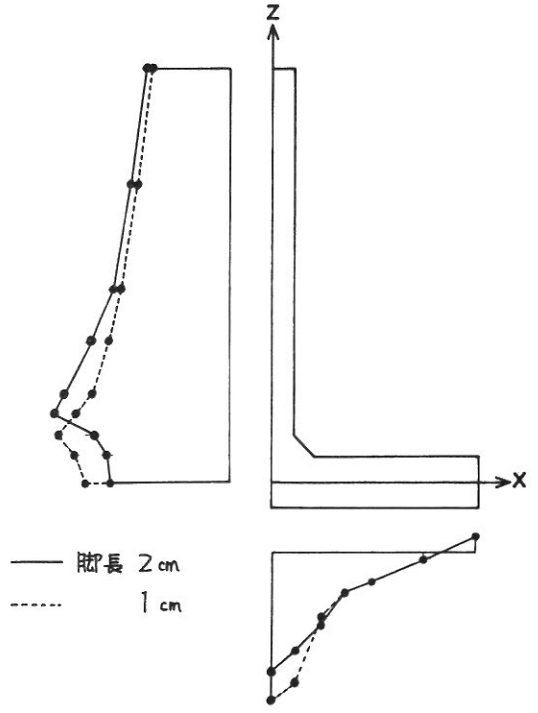


Fig.9

§.7 計算結果

端部を強制変形させたときの $y=0$, $z=0$ 断面におけるそれぞれの応力分布を(Fig. 9)に示す。この図の応力の大きさはスミ肉溶接脚長 2 cm の $x=z=0$ 部分の応力を単位としてある。

§.8 結び

3次元有限要素法による応力解析はいろいろな面で煩雑なためなかなか実用化しにくい。例題の計算に用いられたプログラムは比較的簡単にこの問題を取扱うことができた。

(参考文献)

O. C. Zienkiewicz : The Finite Element Method in Engineering Science
McGRAW-HILL・LONDON, 1971

竜岐哲夫、高張研一、品川汐夫：有限要素法における要素の精度調査
日本造船学会誌 第513号 昭和47年3月

(付録)

読込みデータと計算結果の一部を次に載せる。

```
---- DATA ---

---- THREE DIMENSIONAL F.E.M. EXAMPLE  1973.3. ----

M   1      2100.        0.3

E   6    1    1
          1. (lx)      3. (ly)      1. (lz)
E   7    1    1
          1.           2.           2.5
E   8    1    1
          1.           3.           2.5
E   9    1    1
          1.           4.           5.
E  10    1    1
          1.           6.           5.

S   5    2
          1311-1331 1351-1361 1371
          1312-1332 1352-1362 1372

S   3    2
          1211-1251 1271
          1212-1252 1272

C   5    5    3    1

           811  812  813  814  815
           821  822  823  824  825
           831  832  833  834  835
           841  842  843  844  845
           851  852  853  854  855

           911  912  913  914  915
           921  922  923  924  925
           931  932  933  934  935
           941  942  943  944  945
           951  952  953  954  955

          1811 1812 1813 1814 1815
          1821 1822 1823 1824 1825
          1831 1832 1833 1834 1835
          1841 1842 1843 1844 1845
          1851 1852 1853 1854 1855

T   6    6        20
          1852 1752 1853 1862 1762 1863
          1862 1762 1863 1872 1772 1873
          1752 1652 1753 1762 1662 1763
          1762 1662 1763 1772 1672 1773
          1853 1753 1854 1863 1763 1864
          1863 1763 1864 1873 1773 1874

T   6    2        21
          1752 1753 1853 1762 1763 1863
          1762 1763 1863 1772 1773 1873

B 010   36
           111  117  211  215  217  311  313  315  316  317
           411  413  415  416  417  511  512  513  514  515
           516  517  611  612  613  614  615  616  617  711
           712  713  714  715  716  717

B 001    4
           111  117  121  127

B 001    4                                   (cm)
                                          1.
          1111 1112 1171 1172
```

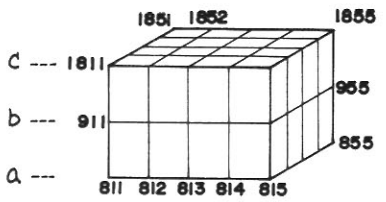
Fig 6 ロ面

Fig 6 イ面

右図 a 面

右図 b 面

右図 c 面



- 例題タイトル
- 材料の性質 (step i)

  ヤング係数 2100t/cm², ポアッソン比 0.3
- 要素の性質 (step ii)

  要素番号 6 の要素は、直方体要素であり材種番号 1 の性質をもち、その大きさは 1.×3.×1.cm である。
- 中間点 (step iii)

  中間点を含む断面の節点の分布状態を示す。"—" 記号は中間点である。
- 6 面体構成点 (step iv)

  要素番号 1 の要素を含む断面の節点の分布状態を示す。
- 3 角柱の構成点 (step v)

  要素番号 20 の 3 角柱要素は 6 個ありそれぞれの構成点が示される。
- 境界条件, 荷重条件 (step vi)

  1111, 1112, 1171, 1172 の 4 点を Z 軸方向に 1 cm 強制変形させる。

DISPLACEMENT OF X,Y AND Z DIRECTION

◦変位

NODAL POINT		X	Y	Z
(1)	511	0.000000E 00	0.000000E 00	0.371430E-01
(2)	521	0.000000E 00	-0.843486E-03	0.372045E-01
(3)	512	-0.131456E-02	0.000000E 00	0.365178E-01
(4)	522	-0.132449E-02	-0.811721E-03	0.365666E-01
(5)	513	-0.262913E-02	0.000000E 00	0.358925E-01
(6)	523	-0.264899E-02	-0.779955E-03	0.359286E-01
(7)	514	-0.364319E-02	0.000000E 00	0.343250E-01
(8)	524	-0.367567E-02	-0.726755E-03	0.343502E-01
(9)	515	-0.465724E-02	0.000000E 00	0.327575E-01
(10)	525	-0.470236E-02	-0.673555E-03	0.327719E-01

◦等価節点力

---EQUIVALENT FORCE---

NODAL POINT		X	Y	Z
(1)	511	-0.797931E 00	-0.323237E-01	0.127186E-01
(2)	521	-0.818322E 00	0.222794E-02	-0.104086E-01
(3)	512	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
(4)	522	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
(5)	513	0.687420E-03	-0.745304E-01	0.117881E-01
(6)	523	-0.403416E-02	0.432028E-02	0.115060E-01
(7)	514	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
(8)	524	0.000000E 00	0.000000E 00	0.000000E 00
(9)	515	-0.219323E-01	-0.276892E-01	-0.267815E-01
(10)	525	-0.309747E-02	0.128164E-01	0.102465E-01

DISPLACEMENT OF X,Y,Z DIRECTION (HEXAHEDRON ELEMENT)
X DIRECTION DISPLACEMENT
Y DIRECTION DISPLACEMENT
Z DIRECTION DISPLACEMENT

◦変位

a面の変位

読込みデータで与えた断面の節点分布に対応させて変位を並べる。
3角柱要素、4面体要素部分の変位も同じ様式である。

811	812	813	814	815
0.00000	-0.00107	-0.00193	-0.00243	-0.00264
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.04743	0.04674	0.04468	0.04175	0.03858
821	822	823	824	825
0.00000	-0.00134	-0.00240	-0.00296	-0.00311
-0.00038	-0.00029	-0.00012	0.00009	0.00028
0.04933	0.04849	0.04620	0.04301	0.03948
831	832	833	834	835
0.00000	-0.00187	-0.00331	-0.00408	-0.00419
-0.00012	0.00003	0.00037	0.00077	0.00106
0.05462	0.05363	0.05099	0.04731	0.04316
841	842	843	844	845
0.00000	-0.00182	-0.00332	-0.00420	-0.00449
-0.00053	-0.00032	0.00012	0.00066	0.00114
0.05701	0.05613	0.05367	0.05011	0.04608
851	852	853	854	855
0.00000	-0.00169	-0.00310	-0.00404	-0.00451
-0.00127	-0.00103	-0.00051	0.00016	0.00084
0.05862	0.05788	0.05575	0.05254	0.04873

STRESS (HEXAHEDRON ELEMENT)
XY PLANE SHEARING STRESS
YZ PLANE SHEARING STRESS
ZX PLANE SHEARING STRESS

◦応力

a面の応力（プロッターによる図示も可能）

811	812	813	814	815
0.00000	-0.21929	-0.38128	-0.42893	-0.38255
1.53455	1.41520	1.23368	1.01452	0.72487
-0.55859	-0.84504	-1.41829	-1.47399	-1.12233
821	822	823	824	825
0.15206	-0.26464	-0.38501	-0.41371	-0.23673
6.41522	2.28966	1.90136	1.45394	1.46985
-0.74591	-1.10961	-1.81414	-2.09524	-2.92851
831	832	833	834	835
0.69139	0.32579	0.29697	0.24118	-0.04713
7.48652	2.05916	1.64301	1.17203	1.37299
-11.69511	-11.92428	-12.64543	-12.80101	-14.11955
841	842	843	844	845
0.16462	0.33762	0.48561	0.42397	0.16697
0.19347	0.21297	0.32301	0.40061	0.44327
-0.71566	-0.38505	-0.61440	-0.66909	-0.39596
851	852	853	854	855
0.19083	0.46085	0.72767	0.76516	0.55333
-0.23274	-0.19982	-0.07238	0.07892	0.15232
-0.59502	-0.23717	-0.43649	-0.53732	-0.35585