昭和46年6月2日～4日
日本鋼構造協会第5回大会研究集会
マトリックス構造解析法研究発表論文集

変化歪要素を用いた弾塑性平面応力解析

Nonlinear plane stress analysis by the refined finite element method.

和田 章†
小杉 立††

1. はじめに

平面問題へのfinite element methodによる弾塑性解析は機械，精密機械等の分野で特に最近発達したように思われる。

しかし，それらの成果を建築構造の方面に生かし，展開しようとすると，鋼構造接合部のdetail等，部分的な検討にはそのまま用いることが出来るが，Frame構造，Brace，耐震壁等を含んだ構造等全構造物の弾塑性解析にはそのまま用いることは出来ない。なぜなら，軸力，剪断力，曲げモーメントの3種の力が同様な割合で作用している部分が多く，曲げ応力を近似するには不適当なconstant strain elementを用いると全構造物を細くmeshに分割しなければならなくなるからである。

その上，弾塑性性状を調べる為にこのelementを用い，個々のelementごとに塑性化してゆく，従来の方法で解析したならば，段階的な結果しか得られないことも明らかである。

ここに，本論文では一昨年春のシンポジウムにて発表したlinear strain element（refined finite element）の考え方を発展させ，弾塑性解析にこのelementを用いる方法を開発し提案するものである。

もちろん，ここで述べようとしている方法を切り欠き部分等の弾塑性性状を調べる為に用いても，より良い結果が得られるはずである。なぜなら，塑性域の進行は多くの場合，その切り欠き部，形の急変した部分等表面に近い部分から生ずるからである。表面の応力を必要と表わすことに適していないconstant strain elementを用いるより，それに対して適しているlinear strain elementを用いた方が良好な精度を期待出来るわけである。

2. 理論概要

歪の連続までを条件にしていないlinear strain elementを用いた解析では同じ節点における各elementの歪は完全には一致しない。

しかし，これらの値を平均したものをその点における歪であると解釈する方法を用いれば，理論的な裏付けはないようであるが，数値計算上非常に都合がよいと同時に，結果がスムーズなものとなり，その評価がしやすくなる利点がある。

† 株式会社日建設計コンピューター室員　†† 東京工業大学大学院生。

本解析法の特長は応力，歪共にすべて節点及び中点上にて定義し内部節点力（内部応力に釣合うべき節点力），剛性matricesをすべて　の値を基準にして求めた所にある。

3．剛性matricesと内部応力に釣合うべき節点力vectorの誘導．

部分的又は全般的に塑性域に入ったelement内部では応力の分布が複雑で剛性も一様でなくなるため，歪energyを計算するための積分は数値的処理　しるを得ない。　element内部の応力をshape functionを用いて近似すれば節点及び中点上の応力から，任意の点における応力を求めることが出来る。

このことを利用してfig-1，fig-2に示す点（m，n）（m=1～3，n=1～3）の9個の応力（σ_x，σ_y，τ_{xy}）を求め，3×3のGaussの積分方法により　1-式[K]剛性matrixと　2-式{Fi}内部応力に釣合うための節点力を数値的に計算出来る。

$$[K]=t\begin{bmatrix}\mathbb{C}^{-1} & 0\\ 0 & \mathbb{C}^{-1}\end{bmatrix}^T\int_A[Q]^T[D^P][Q]\,dA\begin{bmatrix}\mathbb{C}^{-1} & 0\\ 0 & \mathbb{C}^{-1}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\{F_i\}=t\begin{bmatrix}\mathbb{C}^{-1} & 0\\ 0 & \mathbb{C}^{-1}\end{bmatrix}\int_A[Q]^T\{\sigma\}\,dA \quad \cdots\cdots(2)$$

tは板厚，$\mathbb{C}^{-1}$は四角elementで8×8，三角で6×6のmatrix，Qは四角elementで3×16三角で3×12のx，yの関数matrix.

$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}$ element内部での応力

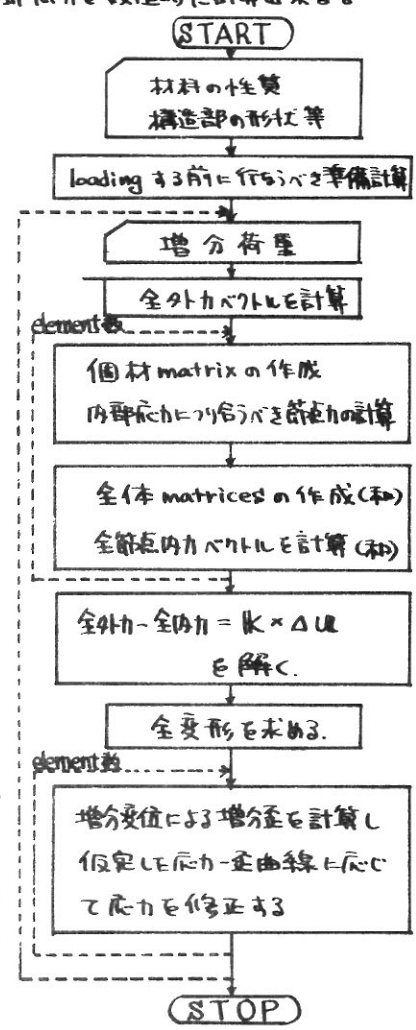
$[D^P]$ matrixの誘導は全面的に山田嘉昭の方法に従った。[1]

$$[D^P]=\left[\frac{9}{4\bar{\sigma}^2H'}\begin{bmatrix}\sigma_x'^2 & \sigma_x'\sigma_y' & 2\sigma_x'\tau_{xy}\\ \sigma_x'\sigma_y' & \sigma_y'^2 & 2\sigma_y'\tau_{xy}\\ 2\sigma_x'\tau_{xy} & 2\sigma_y'\tau_{xy} & 4\tau_{xy}^2\end{bmatrix}+\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}\right]^{-1}$$

4．増分歪による応力の修正

増分変位より求められた個々のelementの節点上（四角elementでは8個，三角elementでは6個）における増分歪を前にも述べたように各節点及び中点にて平均値をとって計算する。

このようにして計算された各点の増分歪（$\Delta\varepsilon_x$，$\Delta\varepsilon_y$，$\Delta\gamma_{xy}$）によって仮定した応力－歪関係にならって応力（σ_x，σ_y，τ_{xy}）を修正し次のstepの計算へもでる。



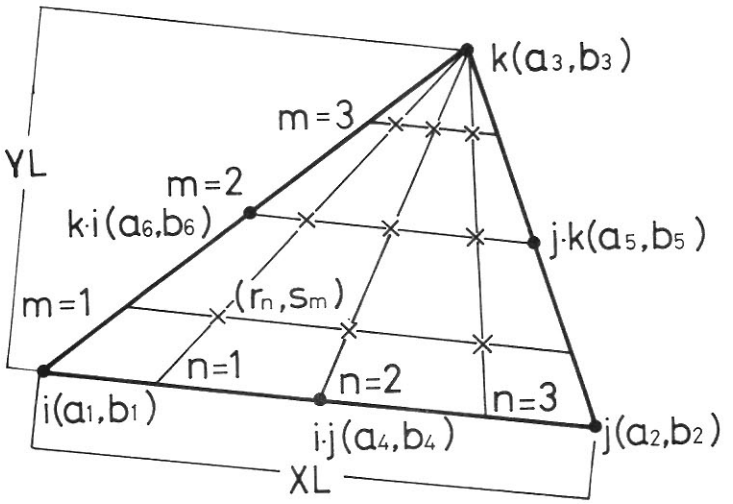


fig-1

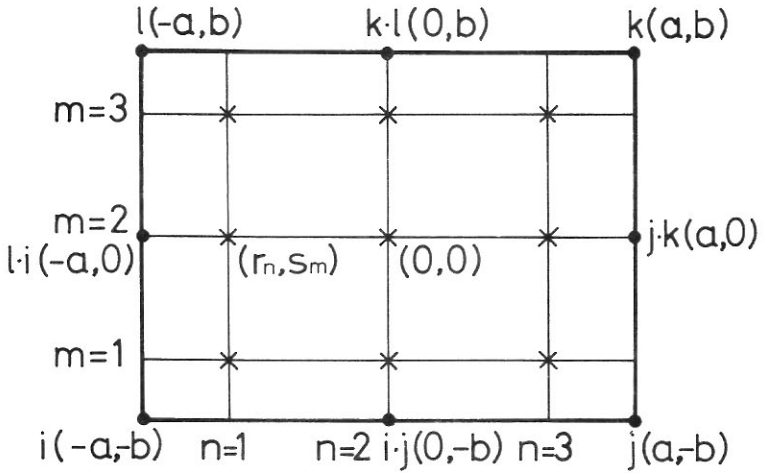


fig-2

5. 参考文献

1. O.C.Zienkiewicz & Y.K.Cheug: "The Finite Element in Structural and Continuum Mechanics", McGraw-Hill (1969)
2. 山田善明, 桜井建美, 吉村信敏: "マトリックス構造解析講座15" JSSC 1969
3. 日高壽次: "数値積分と数値計算" 岩波書店. 昭和24年.
4. 加藤 勉, 青木博文: "有限要素法による鋼平板の弾塑性解析例について" JSSC. 第1回シンポジウム 1969.5. 30,31
5. 青木博文, 加藤 勉: "変位定要素を用いた有限要素法による二次元応力解析" JSSC 第1回シンポジウム 1969.5
6. 青木博文, 加藤 勉: "有限要素法による2次元応力解析における要素および分割数の精度に与える影響", 昭和44年度日本建築学会大会号.

6. 例題

fig-3に示すように，円穴まわりの応力集中に関する弾塑性解析を例題とした。対称条件によりfig-3の斜線部分を取り出し，fig-4のごとくfinite elementsに分割し，同図に示した境界条件のもとに解析した。

材料の機械的性質は $E=2100.0$ t/cm² $\nu=0.3$ $\sigma_y=2.4$ t/cm² $H'=E/100$ とし板厚は 1cm とした。なお，板厚の変化は考慮しなかった。

荷重は $q=0.6$ t/cm，0.8，1.0，1.2，1.4，1.6，1.8，2.0 と8stepにかけて載荷し，1stepごとに2回づつのiterationを行なった。このiterationとは荷重を増加させずに1stepと同様の計算を行なうことである。

各荷重step時の応力度分布をfig-5中①，②，③，④の位置において求め，終りの4pageにグラフ化して載せてある。このグラフは節点及び中点において平均値として決定されている応力をもとに，elementの応力を自動的に内挿し，printerによって書かせたものである。弾塑性解析を行なったことによる応力分布形の変化の状態が非常にはっきりと表わされている。

fig-6は $q=2.0$ t/cm 時の変形状態を示したものである。（変形を200倍に拡大して書いたものである。）

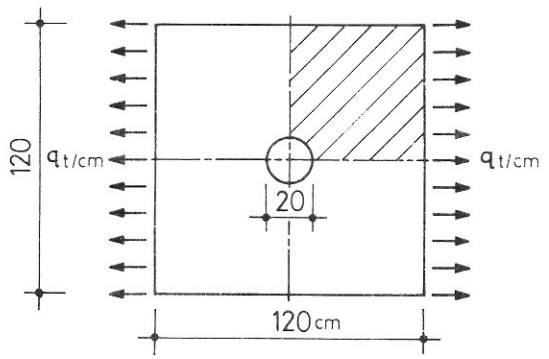


fig-3

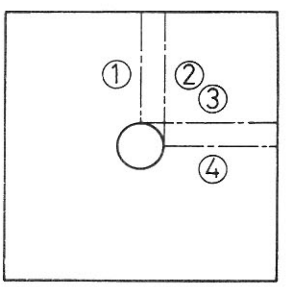


fig-5

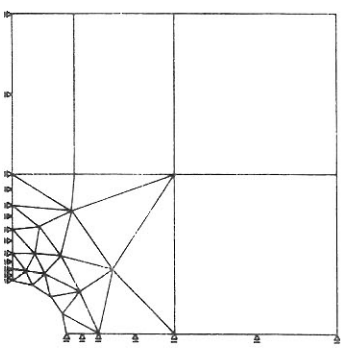


fig-4

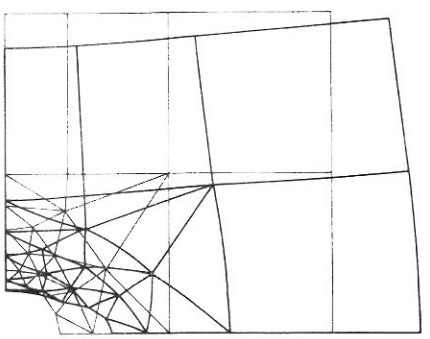
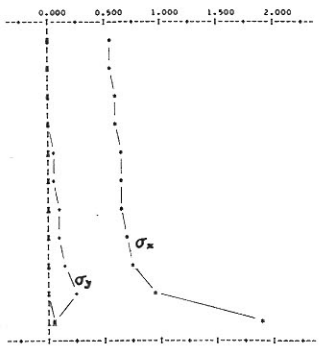


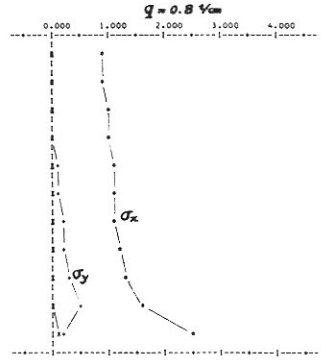
fig-6

stress distribution 1

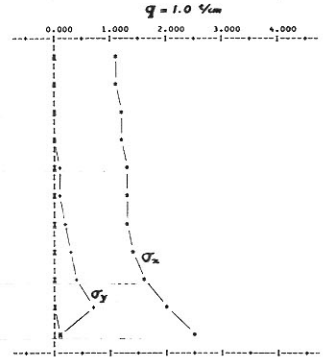


q = 0.6 t/cm

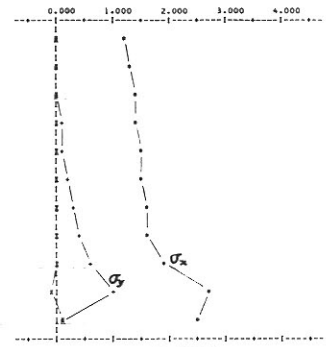
q = 0.8 t/cm



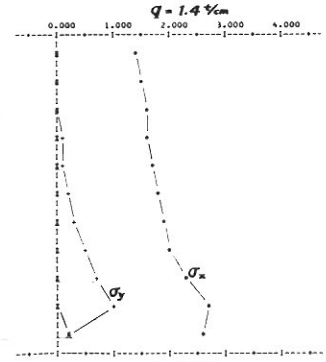
q = 1.0 t/cm



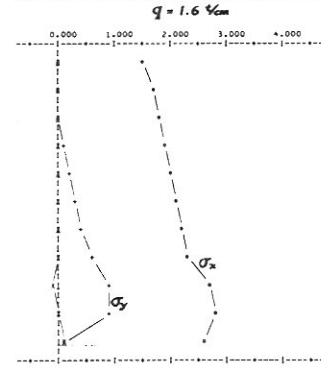
q = 1.2 t/cm



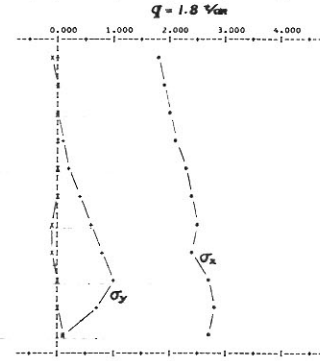
q = 1.4 t/cm



q = 1.6 t/cm

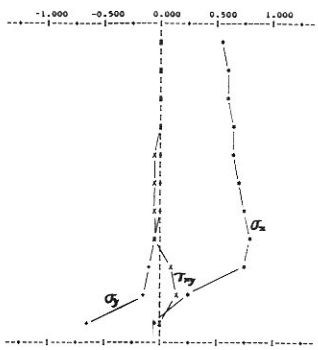


q = 1.8 t/cm

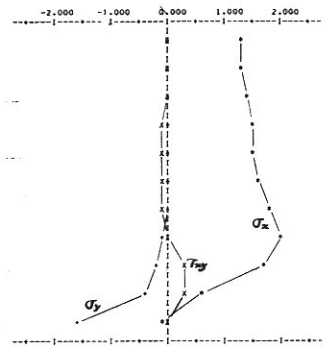


q = 2.0 t/cm

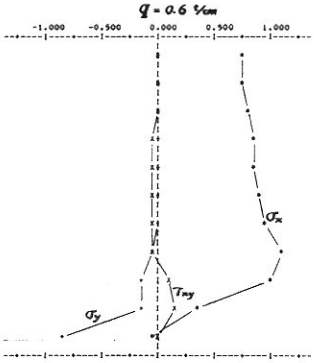
stress distribution 2



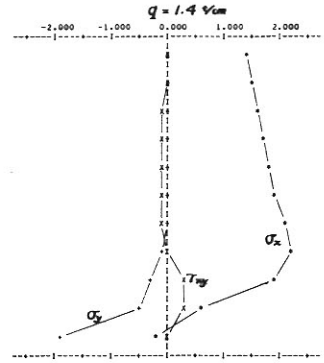
q = 0.6 t/cm



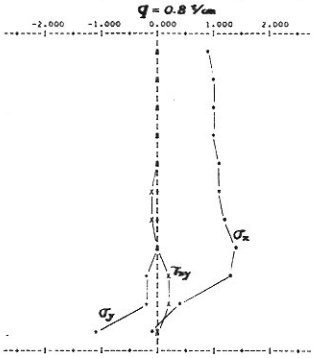
q = 1.4 t/cm



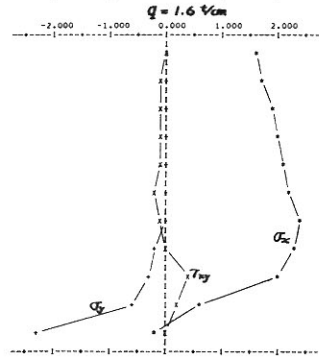
q = 0.8 t/cm



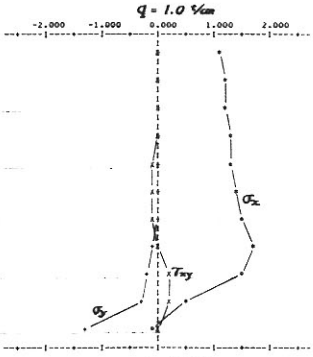
q = 1.6 t/cm



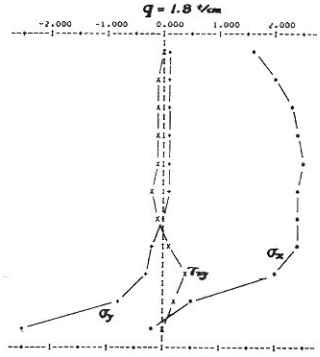
q = 1.0 t/cm



q = 1.8 t/cm

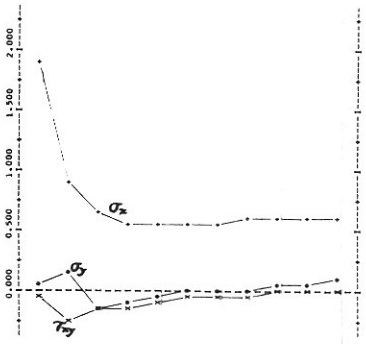


q = 1.2 t/cm

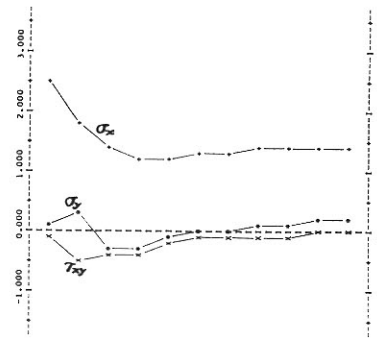


q = 2.0 t/cm

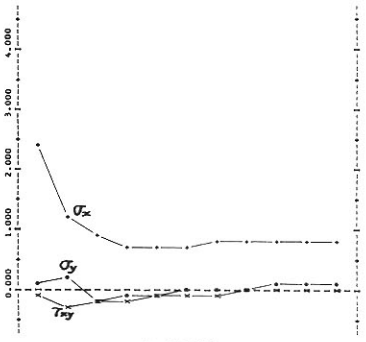
stress distribution 3



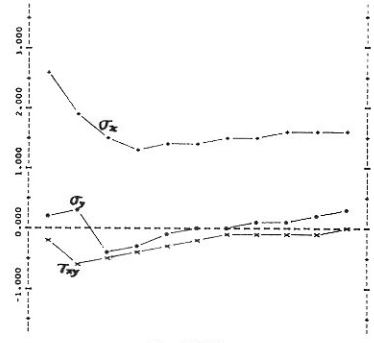
q = 0.6 t/cm



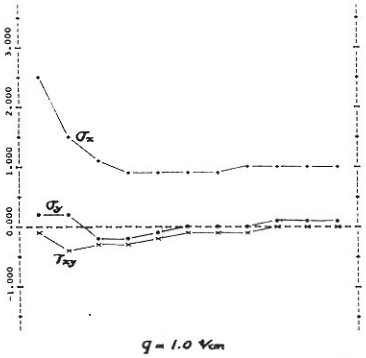
q = 1.4 t/cm



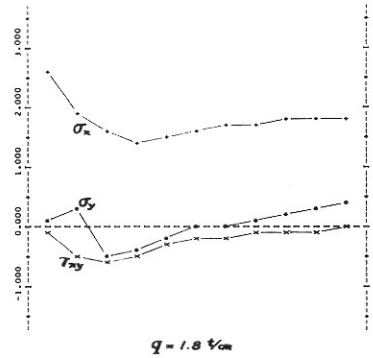
q = 0.8 t/cm



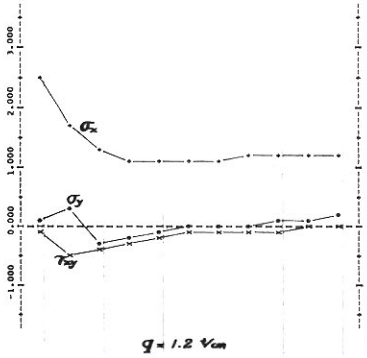
q = 1.6 t/cm



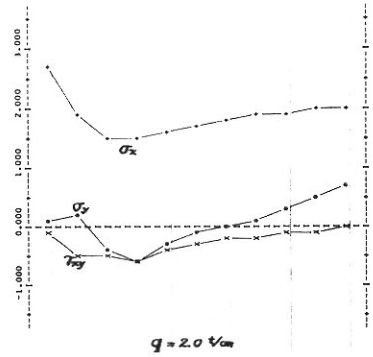
q = 1.0 t/cm

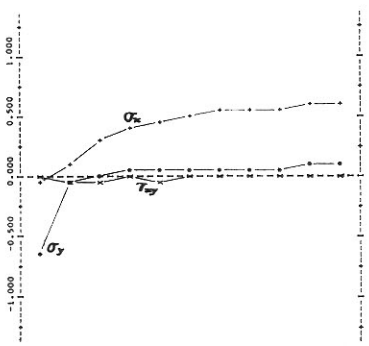
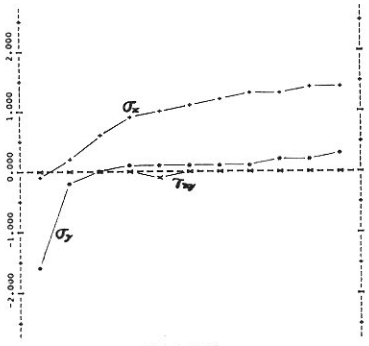
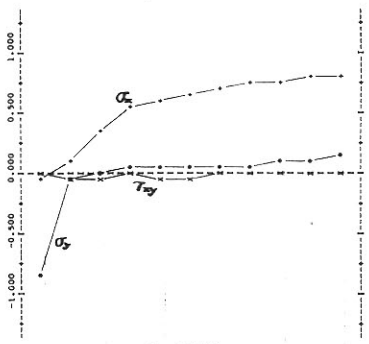
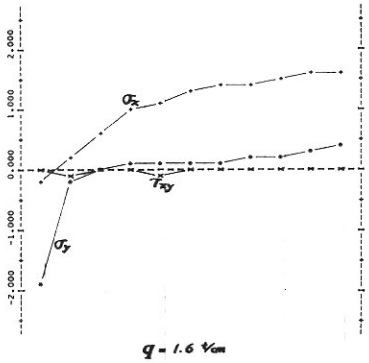
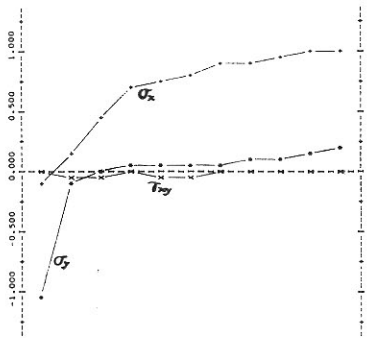
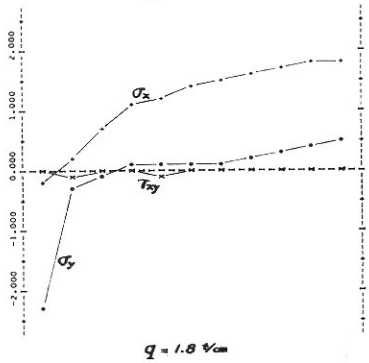
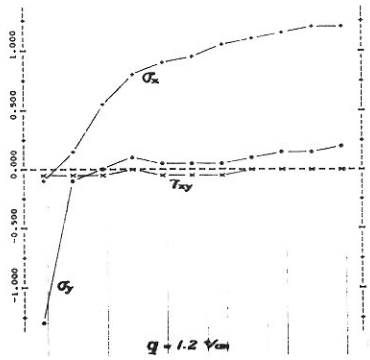
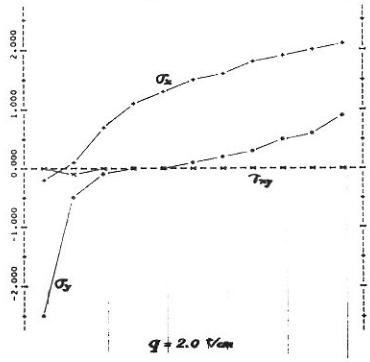


q = 1.8 t/cm



q = 1.2 t/cm



q = 2.0 t/cm

stress distribution 4