構造設計のための
メモランダム
9

曲げ系の架構と
せん断系の架構（その2）

ラーメン架構が曲げ系の架構とせん断系の架構に分類され，はりに比べて柱の剛性が大きい架構ほど，或る層に生じた応力や変形が遠くの層まで伝播し，曲げ系の架構としての色彩が強くなる。特に連層の耐震壁が組み込まれたラーメン架構は，耐震壁が心棒のように働くため，応力や変形の上下層への伝達度が非常に大きい。そのため耐震壁付き架構には，層間変位の高さ方向の分布がなめらかになり，各層の柱・はりの応力が均等になるという設計上の利点があるが，常に上下層の影響を考慮する必要があるという点で，せん断系の架構に比べて扱いにくさがある。また，せん断系の架構では各層ごとに独立に水平方向のバネ（層せん断力／層間変位）を求められるのに対して，曲げ系の架構の場合には，水平力の高さ方向の分布が変わるとバネも変動するため，特定の水平力分布に対応する見かけのバネを求めることはできるが，唯一無二のバネは存在しない（以上は前回のまとめである）。

しかしながら，曲げ系の架構のバネが水平力分布によつて変動することを是認するならば，曲げ系の架構のバネをマトリックスという形で表現することができる。

今回は，架構のバネをマトリックスで表現したときに，曲げ系の架構とせん断系の架構でどのような違いがでてくるかを検討してみたい。

■ マトリックス法による構造解析の手順

或る荷重状態における構造物の各部の応力や変形をマトリックス法で解析する方法として，各節点に作用する力を未知数とする応力法と，各節点の変位を未知数とする変位法があり，図1のような形で表示される。図1の F_i は節点 i に作用する外力で節点力や節点モーメントであり，δ_i は節点 i の変位や回転角である。応力法の場合，節点外力 $\boldsymbol{F}$ と節点変位 $\boldsymbol{\delta}$ は影響係数マトリックス $\boldsymbol{C}$ で結びつけられている。この影響係数マトリックスの要素 c_{ij} は，節点 j に単位の外力を作用させたときに生じる節点 i の変位を表わしている。また，変位法では剛性マトリックス $\boldsymbol{K}$ が節点変位 $\boldsymbol{\delta}$ と節点外力 $\boldsymbol{F}$ を結びつけており，その要素 k_{ij} は，節点 j に単位の変位を与えたときに生じる節点 i の反力を示している。したがつて，影響係数マトリックスの単位は cm/t や rad/t•m などであり，剛性マトリックスの単位は t/cm や t•m/rad などになる。ま

$$\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_n\end{Bmatrix}$$

または $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{CF}$

影響係数マトリックスによる方法

$$\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n}\\ \vdots & & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_n\end{Bmatrix}$$

または $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K\delta}$

剛性マトリックスによる方法

図1　構造物の外力 $\boldsymbol{F}$ と変位 $\boldsymbol{\delta}$ の関係を表わすマトリックス

た，マトリックスの各要素の値は右下がりの対角線に関して対称になる，つまり $k_{ij}=k_{ji}$，または $c_{ij}=c_{ji}$ になるという性質がある。

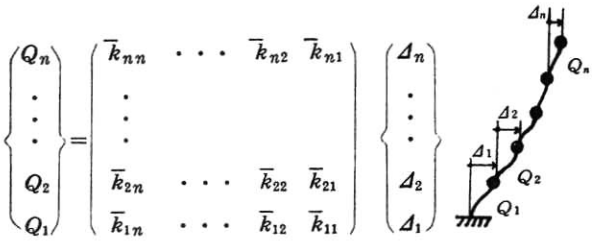
影響係数マトリックスや剛性マトリックスの各要素は，各節点での力の釣合い，変形の適合条件，各部材の力と変位の関係から求められるが，その計算法については今回のテーマからはずれるので，専門書によつていただきたい。マトリックスができあがれば，図1の式 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{CF}$ や $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K\delta}$ は多元連立1次方程式そのものであるから，コンピュータなどを用いてこれを解けば未知数が求まり，この解を使つて各部の応力や変形が得られるわけである。

■ 架構のバネのマトリックス表示

さて，水平荷重を受ける架構のバネ(層せん断力／層間変位)をマトリックスで表現する作業にとりかかろう。私達が得ようとしているマトリックス表示の架構のバネは，図2の形で表わされる。マトリックス $\bar{K}$ の各要素の単位は t/cm で剛性マトリックスと同種のものである。要素 $\bar{k}_{ij}$ は，j 層に1cmの層間変位を与えたときに i 層に生じる層せん断力を表わしている。いいかえれば，要素 $\bar{k}_{ij}$ は j 層の層間変位が i 層の層せん断力に与える影響度を表わす係数である。図2の式の第 i 行目をとりだせば(1)式が得られる。

$$Q_i=\bar{k}_{i1}\Delta_1+\bar{k}_{i2}\Delta_2+\cdots+\bar{k}_{ij}\Delta_j+\cdots+\bar{k}_{in}\Delta_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

この式は，i 層の層せん断力がすべての層の層間変位の影響を受けるような架構を表現できることを示しており，図2の式の各行（各層の Q）について同じことがいえるから，図2のマトリックスは，上下層の影響度が大きい曲げ系の架構のバネを表現できることになる。



または $Q=\bar{K}\Delta$

図2 架構の層せん断力 Q と層間変位 Δ の関係を表わす水平バネ $\bar{K}$ のマトリックス

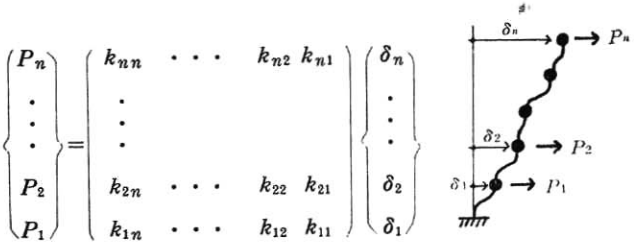
一般に，マトリックス法は節点外力と節点変位で表現されており，図2のマトリックスのような層せん断力 Q_i（水平荷重の和)や層間変位 Δ_i（水平変位の差)では表わされない。図2に対応するマトリックスは図3のように，各層に作用する水平力 P_i と各層の水平変位 δ_i で表わされるのが一般的である。したがつて，図2に示したような架構のバネのマトリックスを求めるためには，図3の P_i-δ_i 表示のマトリックスを Q_i-Δ_i 表示のマトリックスに変換しなければならない。この変換は意外に簡単に行なえるが，その方法については別掲の説明文を参照していただきたい。なお，図3の P_i-δ_i 表示のマトリックスは，架構全体のマトリックス，すなわち未知数として各節点の変位 δ_x，δ_y と回転角 θ を持つたマトリックスから，水平変位 δ_x 以外の未知数を消去することによつて求められる。或いは各層に単位の強制変位を与えて応力解析を行ない，各層の反力を並べる方法でも P_i-δ_i 表示のマトリックスを求めることができる。

以上をまとめると，水平力を受ける架構のバネのマトリックス（層せん断力 Q_i-層間変位 Δ_i 表示）は，架構全体のマトリックスから水平力 P_i と水平変位 δ_i に関する剛性マトリックスを求め，この剛性マトリックスを前掲の説明文の方法で変換することによつて得ることができる。

■ 曲げ系とせん断系のマトリックスの違い

ここで，マトリックスで表示された架構の水平バネが，曲げ系の架構とせん断系の架構でどのように違つてくるかを予想してみよう。

まず曲げ系の架構の場合を，(1)式を見ながら考えると，i 層の層せん断力 Q_i に最も影響を与える層間変位は i 層の層間



または $P=K\delta$

図3 架構に働く水平力 P と水平変位 δ の関係を表わす剛性マトリックス K

変位 Δ_i であり，i 層から遠ざかるほど影響が薄れることは，前回の検討からもうなずけよう。すでに述べたように，マトリックスの要素 $\bar{k}_{ij}$ は層間変位 Δ_j が層せん断力 Q_i に与える影響度を表わしているから，(1)式では $\bar{k}_{ii}$ が最大で，左右に離れるほど値が小さくなる。$\bar{k}_{ii}$ は図2の対角要素を示しており，マトリックスが対角要素に関して対称であることを

水平力 P-水平変位 δ 表示のマトリックスを層せん断力Q-層間変位Δ表示のマトリックスに変換する方法

<骨組の各層に働く水平力 P_i と水平変位 δ_i の関係>

$$\{P\}=[K]\{\delta\} \quad \cdots\cdots(a)$$

または5層について詳しく書くと，

$$\begin{Bmatrix} P_5 \\ P_4 \\ P_3 \\ P_2 \\ P_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{55} & k_{54} & k_{53} & k_{52} & k_{51} \\ k_{45} & k_{44} & k_{43} & k_{42} & k_{41} \\ k_{35} & k_{34} & k_{33} & k_{32} & k_{31} \\ k_{25} & k_{24} & k_{23} & k_{22} & k_{21} \\ k_{15} & k_{14} & k_{13} & k_{12} & k_{11} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_5 \\ \delta_4 \\ \delta_3 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(a')$$

のようになる。

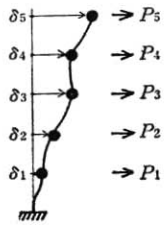


図 A

<層せん断力 Q_i と水平力 P_i の関係>

i 層の層せん断力 Q_i はそれより上層の水平力 P_i の和であるから $Q_i=\sum_{l=i}^{n} P_l$ となりこれをマトリックスを用いて表わすと(b)式のようになる。

$$\{Q\}=[T]\{P\} \quad \cdots\cdots(b)$$

ここにおいて

$$[T]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

または5層の骨組について詳しく書くと (b′) のようになる。

$$\begin{Bmatrix} Q_5 \\ Q_4 \\ Q_3 \\ Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P_5 \\ P_4 \\ P_3 \\ P_2 \\ P_1 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(b')$$

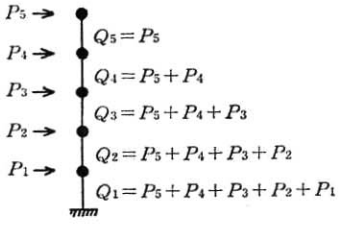


図 B

<水平変位 δ_i と層間変位 Δ_i との関係>

i 層の水平変位 δ_i はそれより下層の層間変位 Δ_i の和であるから $\delta_i=\sum_{l=1}^{i} \Delta_l$ となり，これをマトリックスに用いて表わすと(c)式のようになる。

$$\{\delta\}=[T]^T\{\Delta\} \quad \cdots\cdots(c)$$

ここにおいて

$$[T]^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

または5層の骨組について詳しく書くと(c′)式のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_5 \\ \delta_4 \\ \delta_3 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_5 \\ \Delta_4 \\ \Delta_3 \\ \Delta_2 \\ \Delta_1 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(c')$$

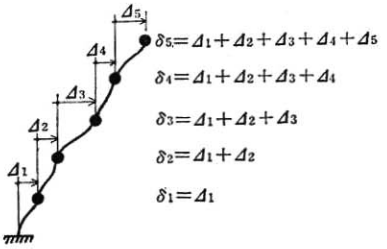


図 C

<層せん断力 Q_i と層間変位 Δ_i の関係>

$$\{Q\}=[T]\{P\} \quad \cdots\cdots(b)$$

$$\{P\}=[K]\{\delta\} \quad \cdots\cdots(a)$$

$$\{\delta\}=[T]^T\{\Delta\} \quad \cdots\cdots(c)$$

このように(a)，(b)，(c)をわかりやすくならべて次々に代入することにより(d)式が求められる。

$$\{Q\}=[\bar{K}]\{\Delta\} \quad \cdots\cdots(d)$$

ここにおいて $[\bar{K}]=[T][K][T]^T$

5層の骨組について(d)式を具体的に計算すると

$$[\bar{K}]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{55} & k_{54} & k_{53} & k_{52} & k_{51} \\ k_{45} & k_{44} & k_{43} & k_{42} & k_{41} \\ k_{35} & k_{34} & k_{33} & k_{32} & k_{31} \\ k_{25} & k_{24} & k_{23} & k_{22} & k_{21} \\ k_{15} & k_{14} & k_{13} & k_{12} & k_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \bar{k}_{55} & \bar{k}_{54} & \bar{k}_{53} & \bar{k}_{52} & \bar{k}_{51} \\ \bar{k}_{45} & \bar{k}_{44} & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{42} & \bar{k}_{41} \\ \bar{k}_{35} & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{31} \\ \bar{k}_{25} & \bar{k}_{24} & \bar{k}_{23} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{21} \\ \bar{k}_{15} & \bar{k}_{14} & \bar{k}_{13} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{11} \end{pmatrix}$$

となり $\bar{k}_{ij}$ は (e) 式によつて求められる。

$$\bar{k}_{ij}=\sum_{l=i}^{n}\sum_{m=i}^{n} k_{lm} \quad \cdots\cdots(e)$$

たとえば $\bar{k}_{34}$ は $(k_{55}+k_{54}+k_{45}+k_{44}+k_{35}+k_{34})$ で表わせることになる。

考慮すると，マトリックスの要素 $\bar{k}$ の値は対角要素が最大で，上下左右に減少することになる。

こうしてみると，対角要素を中心にして上下左右の $\bar{k}$ の値が減少していく度合の少ない架構が曲げ系の架構であり，$\bar{k}$ の値が急激に減少する架構がせん断系の架構であろうと予想されてくる。そこで完全なせん断系の架構のマトリックスを考えてみる。

完全なせん断系の架構の定義は，「任意の層に生じる変形(または応力)が，その層に与えられる外力（または変形）だけに影響され，他の層に与えられる外力（または変形）の影響をまつたく受けない架構」であるから，(1)式の $\bar{k}_{ii}$ 以外の $\bar{k}$ がすべてゼロ，すなわちマトリックスの対角線上の $\bar{k}$ 以外の要素がすべてゼロになる架構が完全なせん断系の架構になる。マトリックスが対角要素を除きすべてゼロならば，(1)式から(2)式が得られる。

$$Q_i=\bar{k}_{ii}\Delta_i \quad \text{または} \quad \bar{k}_{ii}=Q_i/\Delta_i \cdots\cdots(2)$$

(2)式によれば，任意の層のバネは，その層の層せん断力をその層の層間変位で除すことによつて得られ，その層に1つだけ存在することになる。日常私達がイメージしている水平バネはこのバネであり，完全にせん断系と考えられる架構にのみ存在するバネなのである。

現実には完全なせん断系の架構は存在しないから，マトリックスの対角要素以外の要素はゼロにはならないが，せん断系の代表ともいえるウオールガーダー形式のラーメン架構の場合は，対角要素に比べてかなり小さな値になつているに違いない。

以上の考察から，マトリックスで表示された架構の水平バネの各要素の値は，対角線上で最も大きく上下左右に減少してゆくが，その減少の度合は曲げ系の架構では少なく，せん断系の架構では大きくなるものと予想される。その減少の度合がどの程度になるかを典型的な架構をとりあげて調べてみよう。

■ 典型的な架構の水平バネのマトリックス

水平バネのマトリックスの違いを比較するための典型的な架

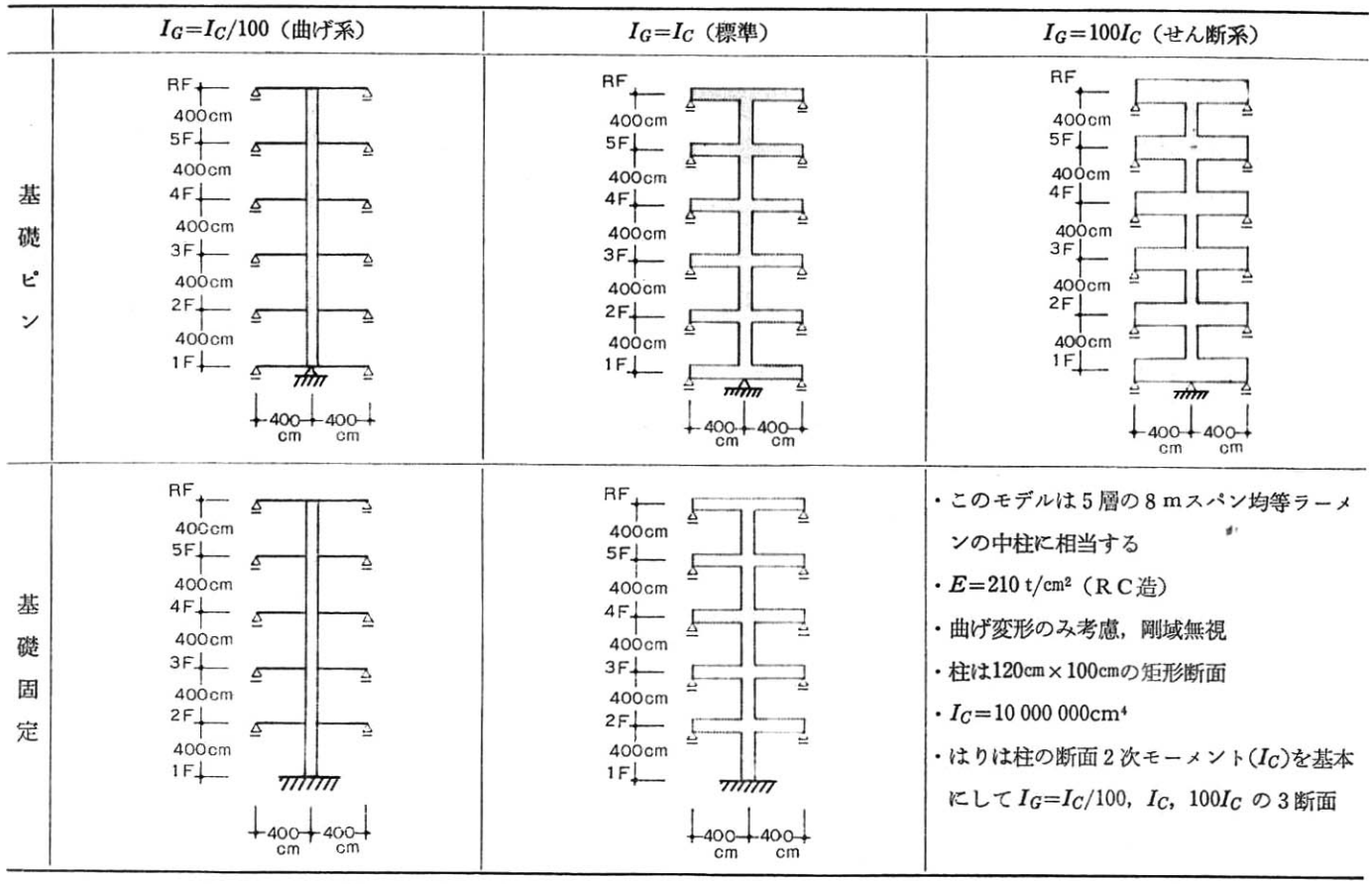


図 4　曲げ系とせん断系の架構のバネのマトリックスの違いを比較するためのラーメンモデル

構として，耐震壁とはりだけで構成される曲げ系の架構，標準的なラーメン架構，ウオールガーダー形式のせん断系の架構の3つ架構を想定し，これらに対応する架構のモデルとして，柱の断面が一定ではりの断面2次モーメントが変化する図4のような単純なモデルをとりあげる。図4のモデルは，はりの中央で分断されたラーメン架構の1部分とみてもよいが，建物の構造のすべてを凝縮したモデルとみるほうが，この場合は適切である。また，このモデルでは，柱の断面を一定としてはりの剛性だけを変化させており，現実的に見れば，耐震壁とはりで構成される架構の場合は，柱とはりの剛性をこのモデルの100倍とすべきところであるが，ここで検討しようとしているのは主としてマトリックスの各要素の比率であるから特に問題はない。なお，このモデルのマトリックスは，その値を検討するときの便利のため，柱とはりの曲げ変形だけを考慮して求めたものである。

コンピュータにより得られた水平バネのマトリックスを表1に示すが，その内容を検討する前に，はりが無限に剛な場合，すなわち完全なせん断系の架構の場合の柱の水平バネ $\bar{k}_0$ を求めておこう。柱の曲げ変形による層間変位を(2)式に代入すれば(3)式が得られる。

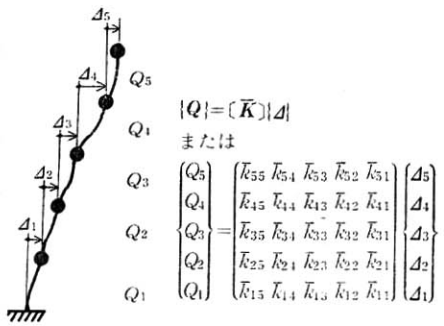
$$\bar{k}_0 = 12\,EI_C/H^3 = 12\times 210\times 10^7/400^3 = 393.75\ (\mathrm{t/cm}) \quad \cdots\cdots(3)$$

表1の各マトリックスには，上段にマトリックスの各要素の値が示され，下段のカッコ内には対角要素を100としたときの，同一行内の要素の比率が記入されている。

まず，マトリックスの要素の値をながめてみると，どの架構も理論どおり右下がりの対角線に関して対称になつているが，基礎がピン支持の場合は右上がりの対角線に関しても対称になつていることに気付く。これは検討モデルが架構形状・部材寸法とも上下対称であることにもよるが，R階と1階の節点がともに回転自由で同じ状態になつているためである。

せん断系の架構のマトリックスをみると，どの対角要素も(3)式の値に近く，他の要素は充分に小さな値になつており，典型的なせん断系であることが分る。ここでは基礎が固定の架構を省いたが，はりの剛性が柱に比べて大きいので，マトリックスの値はピン支持の場合とほとんど変わらない。

表1：層間変位 Δ と層せん断力 Q を関係づける水平バネのマトリックス $[\bar{K}]$

	$I_G = I_C/100$（曲げ系）	$I_G = I_C$（標準）	$I_G = 100\,I_C$（せん断系）
基礎ピン	$[\bar{K}]=$ 56.3 (100) −67.2 (−119) 17.8 (31) −4.7 (−8) 0.9 (1) −67.2 (−48) 139.4 (100) −89.2 (−64) 23.3 (16) −4.7 (−3) 17.8 (12) −89.2 (−61) 144.9 (100) −89.2 (−61) 17.8 (12) −4.7 (−3) 23.2 (16) −89.2 (−64) 139.5 (100) −67.3 (−48) 0.9 (1) −4.7 (−8) 17.8 (31) −67.3 (−119) 56.3 (100)	$[\bar{K}]=$ 218.8 (100) −60.6 (−27) 8.8 (4) −1.3 (−0) 0.2 (0) −60.6 (−25) 242.8 (100) −64.1 (−26) 9.3 (3) −1.3 (−0) 8.8 (3) −64.1 (−26) 243.3 (100) −64.1 (−26) 8.8 (3) −1.3 (−0) 9.3 (3) −64.1 (−26) 242.8 (100) −60.6 (−25) 0.2 (0) −1.3 (−0) 8.8 (4) −60.6 (−27) 218.8 (100)	$[\bar{K}]=$ 389.9 (100) −1.9 (−0) 0.0 (0) 0.0 (0) 0.0 (0) −1.9 (−0) 389.9 (100) −1.9 (−0) 0.0 (0) 0.0 (0) 0.0 (0) −1.9 (−0) 389.9 (100) −1.9 (−0) 0.0 (0) 0.0 (0) 0.0 (0) −1.9 (−0) 389.9 (100) −1.9 (−0) 0.0 (0) −0.0 (−0) 0.0 (0) −1.9 (−0) 389.9 (100)
基礎固定	$[\bar{K}]=$ 56.3 (100) −67.3 (−119) 17.9 (31) −4.8 (−8) 1.6 (2) −67.3 (−48) 139.5 (100) −89.5 (−64) 24.2 (17) −8.0 (−5) 17.9 (12) −89.5 (−61) 145.8 (100) −92.6 (−63) 30.6 (21) −4.8 (−3) 24.2 (15) −92.6 (−60) 152.2 (100) −115.2 (−75) 1.6 (0) −8.0 (−3) 30.6 (12) −115.2 (−48) 236.8 (100)	$[\bar{K}]=$ 218.8 (100) −60.6 (−27) 8.8 (4) −1.3 (−0) 0.2 (0) −60.6 (−25) 242.8 (100) −64.2 (−26) 9.4 (3) −1.6 (−0) 8.8 (3) −64.2 (−26) 243.4 (100) −64.4 (−26) 10.7 (4) −1.3 (−0) 9.4 (3) −64.4 (−26) 244.7 (100) −73.6 (−30) 0.2 (0) −1.6 (−0) 10.7 (3) −73.6 (−23) 307.6 (100)	 $\{Q\}=[\bar{K}]\{\Delta\}$ または $\begin{Bmatrix}Q_5\\Q_4\\Q_3\\Q_2\\Q_1\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{K}_{55}&\bar{K}_{54}&\bar{K}_{53}&\bar{K}_{52}&\bar{K}_{51}\\\bar{K}_{45}&\bar{K}_{44}&\bar{K}_{43}&\bar{K}_{42}&\bar{K}_{41}\\\bar{K}_{35}&\bar{K}_{34}&\bar{K}_{33}&\bar{K}_{32}&\bar{K}_{31}\\\bar{K}_{25}&\bar{K}_{24}&\bar{K}_{23}&\bar{K}_{22}&\bar{K}_{21}\\\bar{K}_{15}&\bar{K}_{14}&\bar{K}_{13}&\bar{K}_{12}&\bar{K}_{11}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_5\\\Delta_4\\\Delta_3\\\Delta_2\\\Delta_1\end{Bmatrix}$

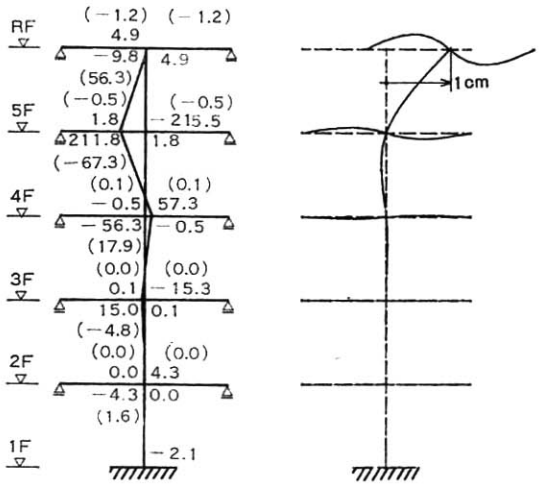
注）マトリックスの上段の数値はバネマトリックスの各要素の値を示す。
また，下段のカッコ内の数値は，対角要素を100としたときの同一行内の要素の比率を示す。

つぎに各要素の比率を見ると，対角要素に対するその左右の要素の比率は，標準的なラーメン架構では25％前後であるが，耐震壁付き架構の場合は50～70％，部分的には120％に達している。前項では，対角要素がその左右の要素の中で最大になると予想したが，曲げ系の場合には予想と違つた部分がでるようである。なぜそうなるのか調べてみよう。

耐震壁とはりで構成される基礎固定のマトリックスの左上すみのバネ要素が56.3t/cmであるから，最上層だけに1cmの層間変位を与えれば最上層には56.3tの層せん断力が発生するはずである。図5は，そのような応力解析を別途に行なつた結果を示している。この応力図で各階の柱のせん断力はバネのマトリックスの1列目の値と一致している。これはマクスウエル-ベッテイの相反定理によるものである。応力図と変形図を見れば，この結果が，頂部以外の節点を水平移動しないようにした架構の頂部に，56.3tの水平力を作用させた場合とまつたく一致していることが分る。力が釣り合つていることは固定モーメント法により手計算で確認できる。この例のように，柱に比べはりの剛性が極端に小さい場合には，はりの効きめが少ないために，最上階の柱は片持ばり，他の柱は連続ばりのように働き，その結果，最上階よりその下の階の層せん断力のほうが大きくなることになる。図6のように中間階に層間変位が与えられる場合は，その層の柱に発生する曲げモーメントが上下の層に分散されるため，その層のせん断力が最大になる。

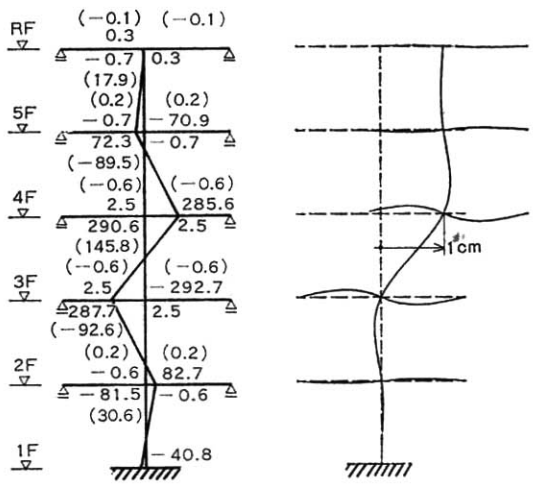
今回は，水平力を受ける架構のバネをマトリックスで表現したときに，曲げ系の架構とせん断系の架構で，マトリックスの各要素がどのように変化するかを調べてみた。その結果，マトリックスの要素の値は，対角要素が最大で上下左右に減少してゆくが，この減少の度合が小さな架構が曲げ系の架構であり，逆に，減少の度合の大きな架構がせん断系の架構であることが確認できた。この減少の度合は，対角要素に対するその左右の要素の割合で表わすと，曲げ系の架構で50％以上（部分的に100％以上），一般的なラーメン架構で25％前後，せん断系の架構で10％以下であつた。

今回示した，架構の水平バネをマトリックスで表現する方法は，そのマトリックスの演算も簡単に行なえ，架構が曲げ系かせん断系かという判定をする上で有効な方法であると思われる。マトリックス法による応力解析プログラムには，図3に示したような剛性マトリックス(水平荷重／水平変位)を計算するルーチンが組み込まれているのが一般であるから，ついでに図2のような水平バネ（層せん断力／層間変位）のマトリックスを求めるルーチンを追加しておくと便利である。なお，参考までに，図4の構造モデルについての剛性マトリックスと影響係数マトリックスを，また，そのマトリックスに対応する応力と変形の状態を表2～表6に示す。



注）カッコ内の数字はせん断力（t），その他は曲げモーメント（t･m）を示す。曲げモーメントは右回り表示。

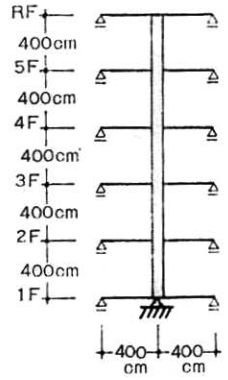
図5　耐震壁付き（曲げ系）架構の応力と変形
（5階に層間変位1cmを与えた場合）



注）カッコ内の数字はせん断力（t），その他は曲げモーメント（t･m）を示す。曲げモーメントは右回り表示。

図6　耐震壁付き（曲げ系）架構の応力と変形
（3階に層間変位1cmを与えた場合）

表 2：剛性マトリックス〔K〕と影響係数マトリックス〔C〕<基礎ピン，$I_G=I_C/100$>



$$[K]=\begin{pmatrix} 56.3 & -123.5 & 85.0 & -22.5 & 5.6 \\ -123.5 & 330.2 & -313.7 & 135.0 & -33.5 \\ 85.0 & -313.7 & 462.7 & -346.6 & 135.0 \\ -22.5 & 135.0 & -346.6 & 462.8 & -313.8 \\ 5.6 & -33.5 & 135.0 & -313.8 & 330.3 \end{pmatrix}$$

$$[C]=\begin{pmatrix} 2.137 & 1.715 & 1.285 & 0.853 & 0.423 \\ 1.715 & 1.403 & 1.069 & 0.717 & 0.358 \\ 1.285 & 1.069 & 0.833 & 0.569 & 0.287 \\ 0.853 & 0.717 & 0.569 & 0.401 & 0.207 \\ 0.423 & 0.358 & 0.287 & 0.207 & 0.111 \end{pmatrix}$$

$E=210\text{t/cm}^2$

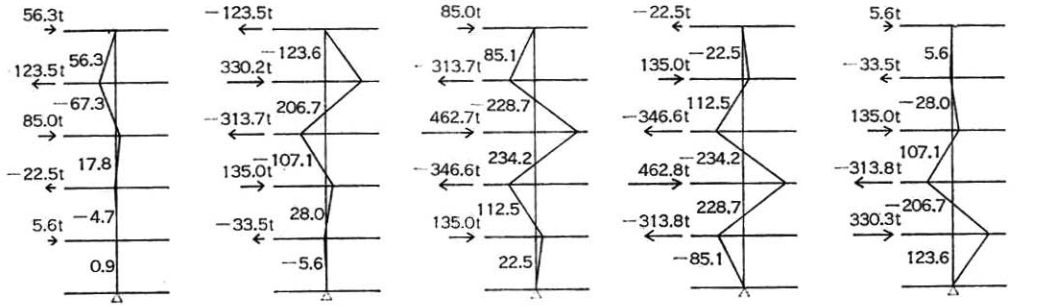
柱：120cm×100cm

$I_C=10\,000\,000\text{cm}^4$

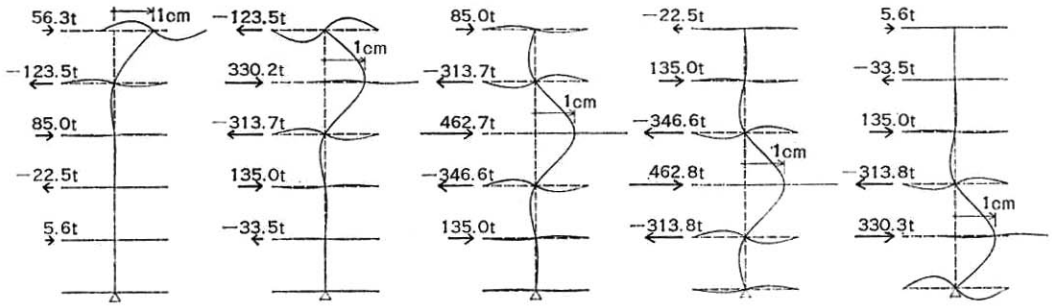
はり：$I_G=I_C/100$

剛性マトリックス〔K〕

応力図

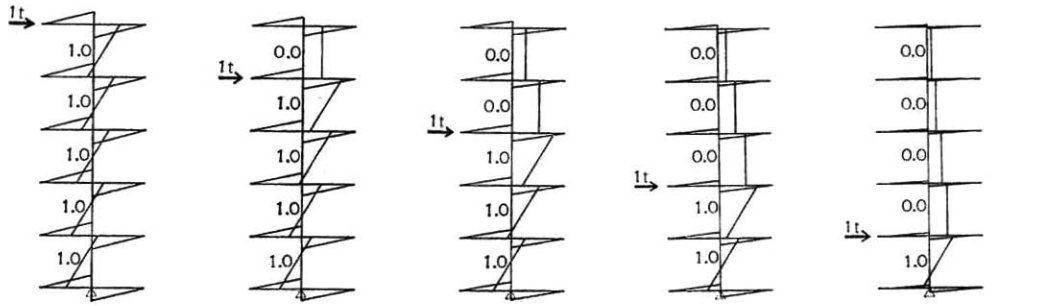


変形図

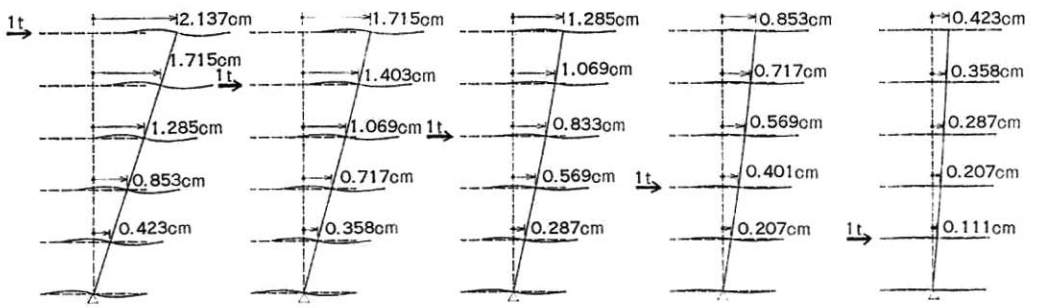


影響係数マトリックス〔C〕

応力図

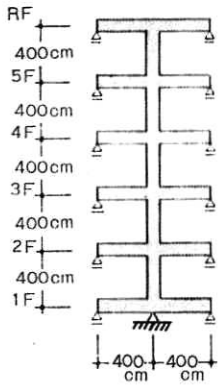


変形図



注）柱の位置に書いた数字は柱のせん断力を示す

表 3：剛性マトリックス〔K〕と影響係数マトリックス〔C〕<基礎ピン，$I_G=I_C$>



$$[K]=\begin{pmatrix} 218.8 & -279.5 & 69.5 & -10.1 & 1.5 \\ -279.5 & 582.9 & -376.5 & 83.6 & -12.1 \\ 69.5 & -376.5 & 614.5 & -381.0 & 83.6 \\ -10.1 & 83.6 & -381.0 & 614.5 & -376.5 \\ 1.5 & -12.1 & 83.6 & -376.5 & 582.9 \end{pmatrix}$$

$$[C]=\begin{pmatrix} 0.0352 & 0.0289 & 0.0214 & 0.0138 & 0.0064 \\ 0.0289 & 0.0274 & 0.0212 & 0.0138 & 0.0064 \\ 0.0214 & 0.0212 & 0.0198 & 0.0136 & 0.0063 \\ 0.0138 & 0.0138 & 0.0136 & 0.0122 & 0.0062 \\ 0.0064 & 0.0064 & 0.0063 & 0.0062 & 0.0049 \end{pmatrix}$$

$E=210\ \mathrm{t/cm^2}$

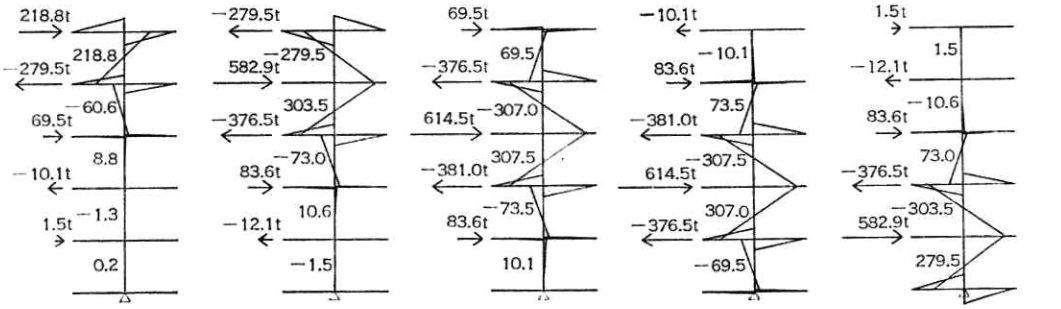
柱：120cm×100cm

$I_C=10\,000\,000\mathrm{cm^4}$

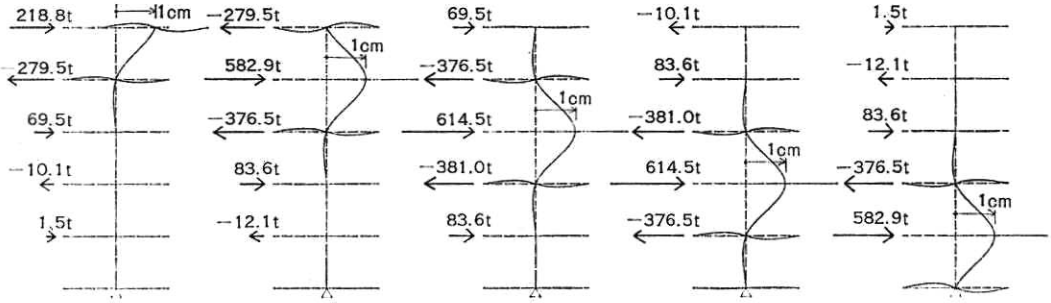
はり：$I_G=I_C$

剛性マトリックス〔K〕

応力図

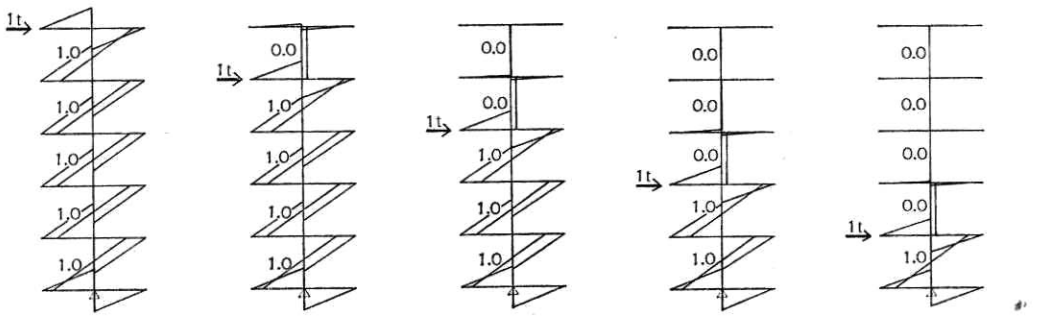


変形図

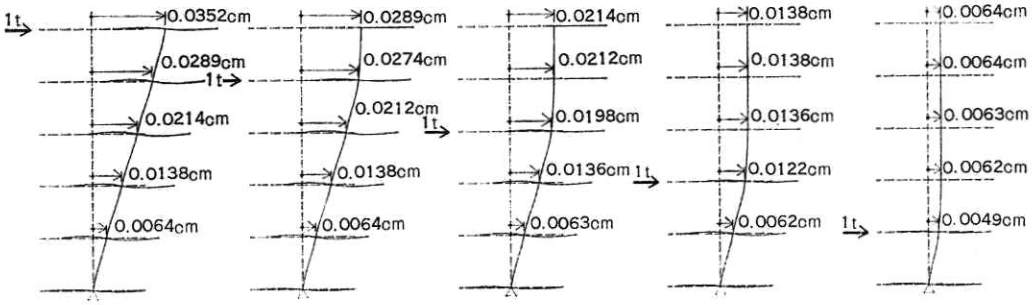


影響係数マトリックス〔C〕

応力図

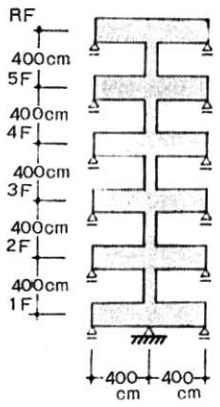


変形図



注）柱の位置に書いた数字は柱のせん断力を示す

表 4：剛性マトリックス〔K〕と影響係数マトリックス〔C〕<基礎ピン，$I_G=100\,I_C$>



$$[K]=\begin{pmatrix} 389.9 & -391.8 & 1.9 & -0.0 & 0.0 \\ -391.8 & 783.6 & -393.7 & 1.9 & -0.0 \\ 1.9 & -393.7 & 783.6 & -393.7 & 1.9 \\ -0.0 & 1.9 & -393.7 & 783.6 & -393.7 \\ 0.0 & -0.0 & 1.9 & -393.7 & 783.6 \end{pmatrix}$$

$$[C]=\begin{pmatrix} 0.0129 & 0.0103 & 0.0078 & 0.0052 & 0.0026 \\ 0.0103 & 0.0103 & 0.0078 & 0.0052 & 0.0026 \\ 0.0078 & 0.0078 & 0.0077 & 0.0052 & 0.0026 \\ 0.0052 & 0.0052 & 0.0052 & 0.0052 & 0.0026 \\ 0.0026 & 0.0026 & 0.0026 & 0.0026 & 0.0026 \end{pmatrix}$$

$E=210\ \mathrm{t/cm^2}$

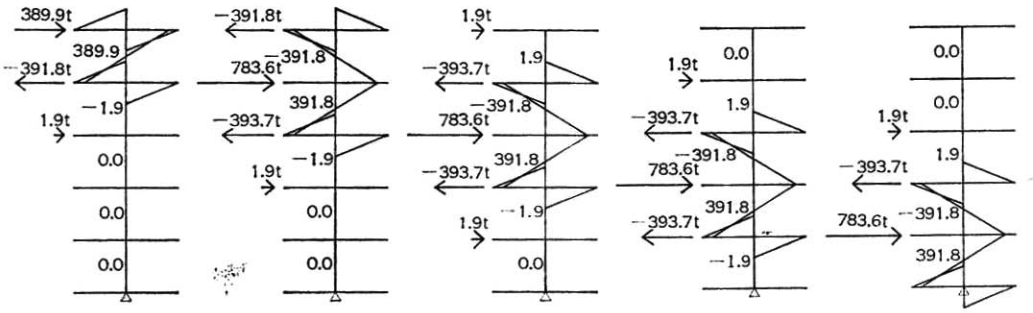
柱：120cm×100cm

$I_C=10\,000\,000\mathrm{cm^4}$

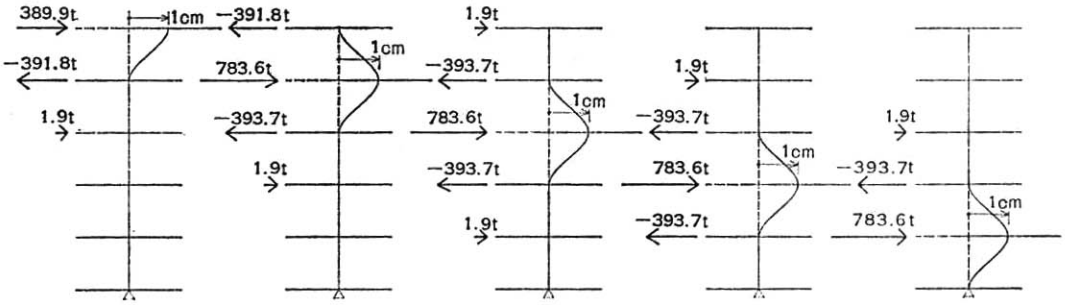
はり：$I_G=100I_C$

剛性マトリックス〔K〕

応力図

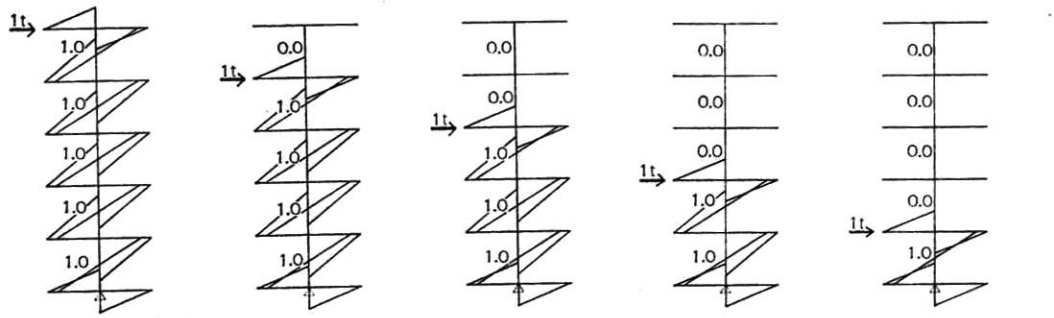


変形図

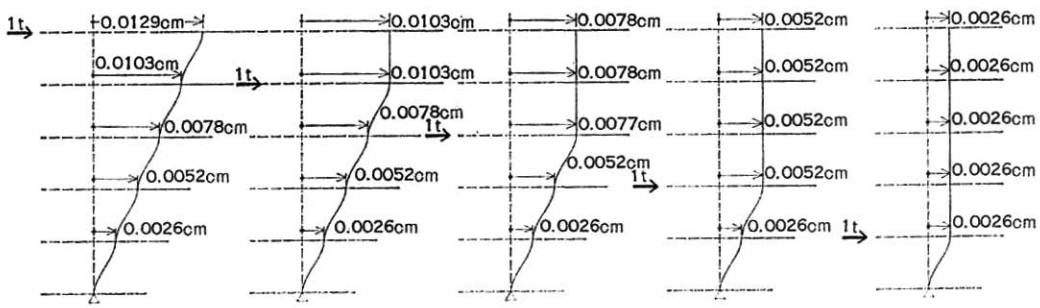


影響係数マトリックス〔C〕

応力図

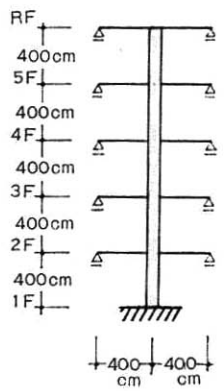


変形図



注）柱の位置に書いた数字は柱のせん断力を示す

表 5：剛性マトリツクス〔K〕と影響係数マトリツクス〔C〕<基礎固定，$I_G=I_C/100$>



$$[K]=\begin{pmatrix} 56.3 & -123.6 & 85.2 & -22.7 & 6.4 \\ -123.6 & 330.4 & -314.2 & 136.4 & -38.6 \\ 85.2 & -314.2 & 464.3 & -352.1 & 155.4 \\ -22.7 & 136.4 & -352.1 & 483.3 & -390.6 \\ 6.4 & -38.6 & 155.4 & -390.6 & 619.5 \end{pmatrix}$$

$$[C]=\begin{pmatrix} 0.749 & 0.537 & 0.336 & 0.166 & 0.046 \\ 0.537 & 0.404 & 0.264 & 0.134 & 0.038 \\ 0.336 & 0.264 & 0.185 & 0.100 & 0.030 \\ 0.166 & 0.134 & 0.100 & 0.061 & 0.020 \\ 0.046 & 0.038 & 0.030 & 0.020 & 0.009 \end{pmatrix}$$

$E=210\text{t/cm}^2$

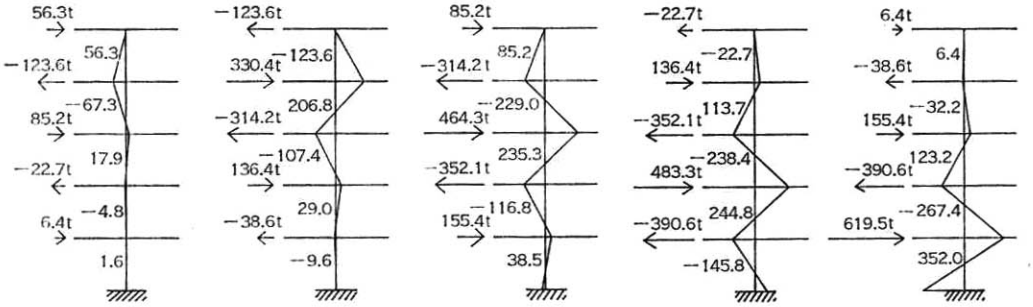
柱：120cm×100cm

$I_C=10\,000\,000\ \text{cm}^4$

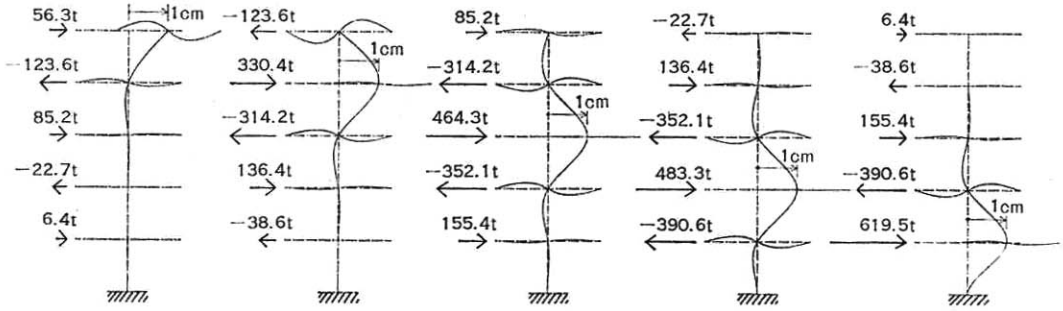
はり：$I_G=I_C/100$

剛性マトリツクス〔K〕

応力図

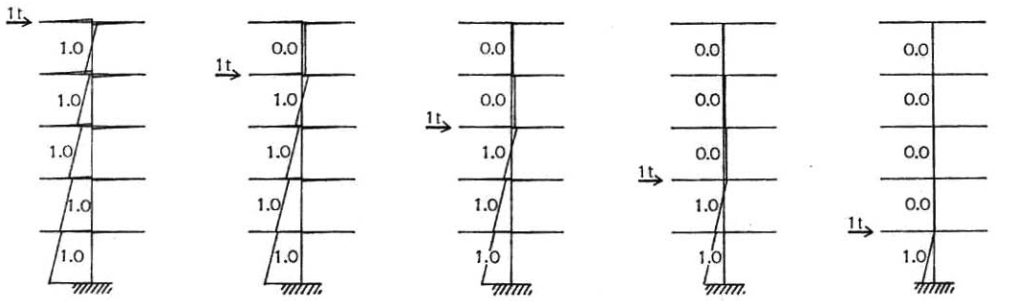


変形図

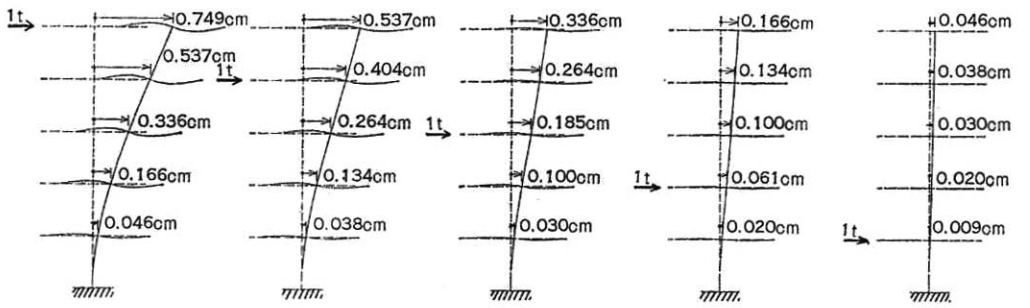


影響係数マトリツクス〔C〕

応力図

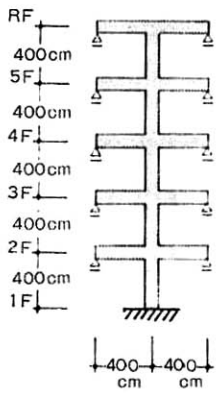


変形図



注）柱の位置に書いた数字は柱のせん断力を示す

表 6：剛性マトリックス〔K〕と影響係数マトリックス〔C〕<基礎固定，$I_C=I_G$>



$$[K]=\begin{pmatrix} 218.8 & -279.5 & 69.5 & -10.1 & 1.5 \\ -279.5 & 582.9 & -376.5 & 83.7 & -12.5 \\ 69.5 & -376.5 & 614.5 & -381.3 & 86.1 \\ -10.1 & 83.7 & -381.3 & 616.9 & -393.5 \\ 1.5 & -12.5 & 86.1 & -393.5 & 699.5 \end{pmatrix}$$

$$[C]=\begin{pmatrix} 0.0334 & 0.0270 & 0.0196 & 0.0120 & 0.0048 \\ 0.0270 & 0.0256 & 0.0194 & 0.0120 & 0.0048 \\ 0.0196 & 0.0194 & 0.0180 & 0.0118 & 0.0047 \\ 0.0120 & 0.0120 & 0.0118 & 0.0104 & 0.0046 \\ 0.0048 & 0.0048 & 0.0047 & 0.0046 & 0.0035 \end{pmatrix}$$

$E=210\text{t/cm}^2$

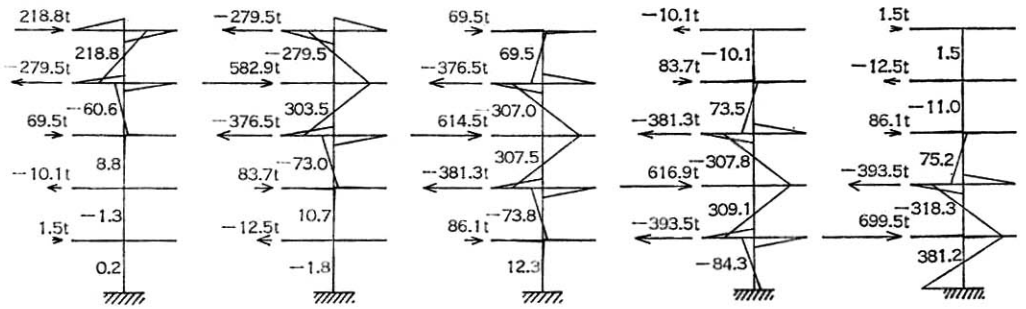
柱：120cm×100cm

$I_C=10\,000\,000\text{cm}^4$

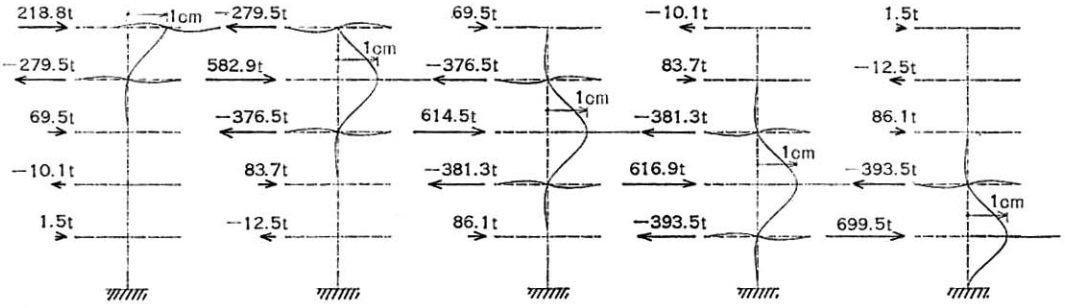
はり：$I_G=I_C$

剛性マトリックス〔K〕

応力図

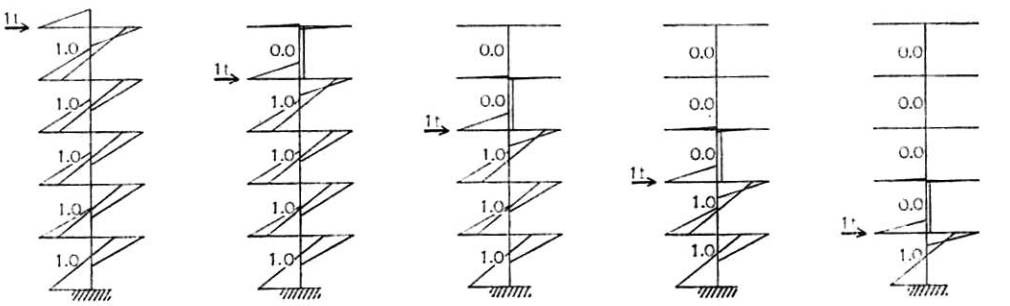


変形図

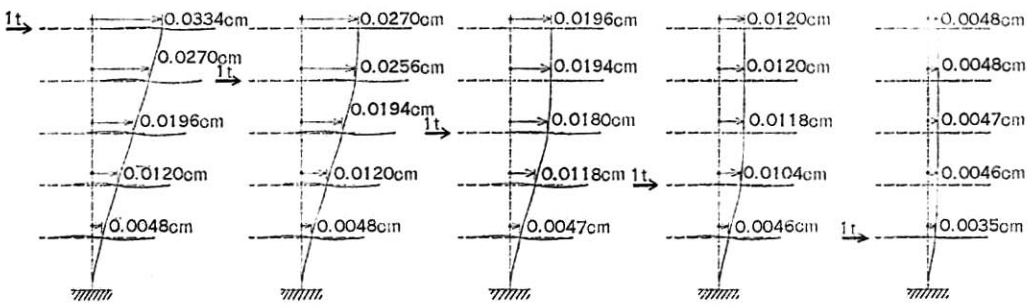


影響係数マトリックス〔C〕

応力図



変形図



注）柱の位置に書いた数字は柱のせん断力を示す

（筆者の方々・㈱日建設計構造設計主管　堀井昌博，同技術主査　和田　章）