構造設計のための
メモランダム
4

# 無限に剛な部材と
# マトリックス変位法の精度

建築の構造設計にコンピュータが利用され始めて以来，20年近くの歳月が過ぎようとしている。この間のコンピュータの性能の向上はめざましく，20年前にコンピュータと呼ばれていた規模のものが，現在では，やや高性能の卓上計算機より見劣りするほどである。この性能の向上とコストの低下に支えられて，建築の構造設計に幅広くコンピュータが利用されるようになつた。

なかでも，架構の応力解析には多くの人が気軽にコンピュータを使用しており，その解析法としてマトリックス変位法がごく一般的に用いられている。今回は，マトリックス変位法により応力解析をする場合の，無限に剛な部材の扱い方と解の精度について考えてみたい。

## ■ 架構のモデル化と無限に剛な部材

図1は，中央に連層の耐震壁を有するビル建築の架構を示している。このような架構の応力をマトリックス変位法で解析する場合，耐震壁のモデル化の方法はいくつか考えられるが，図2に示すように，耐震壁をその付帯柱と一体のI形断面の柱として扱い，各階のはりを端部に耐震壁の幅の1/2の長さの剛域を持つ部材とする方法が一般的であろう。このとき，耐震壁はせん断変形を考慮した線材，はりは端部の剛域を考慮した線材としての剛性マトリックスを用いることになる。はりの端部の剛域は，線材と扱われた耐震壁にも平面保持の仮定が成り立つものとして置かれたのであつて，現実に無限に剛な部材がそこにあるわけではない。以上のモデル化（面材を線材に変換）によつて，図1の架構の応力と変形は，工学的に満足できる精度で求められる。

それでは，図3に示すような，耐震壁の幅が中間階で変わる架構の場合は，どのようなモデル化によつて応力解析したらよいのだろうか。図4にそのモデル化の例を示す。図2のモデルでは，はりはすべて端部にだけ剛域を持つ線材であつたが，図4のモデルでは図中のＡＢとＢＣ間に全長が剛域のはり（**無限に剛なはり**）ができてしまう。図5の例も同様で，図6のようにモデル化すれば，図中のＡＢ材，ＢＣ材，ＢＤ材は無限に剛な部材になる。コンピュータは有限の数値しか扱えないから，ここで頭をかかえることになる。

このように無限に剛な部材ができるのは，耐震壁のような面

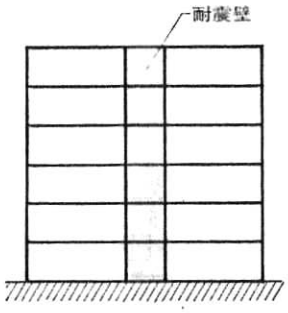


図1　耐震壁つき架構A

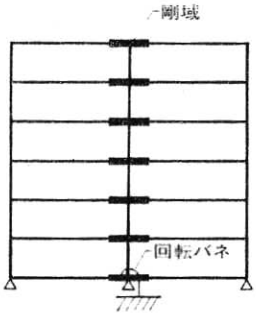


図2　架構Aのモデル化

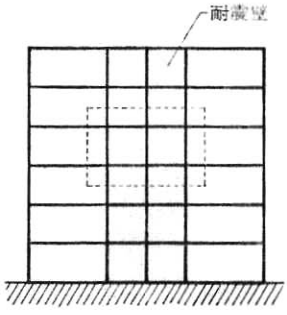


図3　耐震壁つき架構B

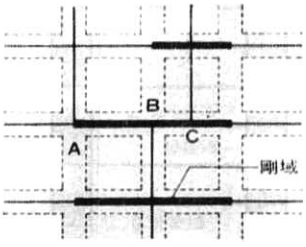


図4　架構Bの中央のモデル化

材を無理に線材に置き換えようとしたからに他ならない。面材を面材として扱える有限要素法のようなプログラムを使えばこのような問題がなくなることは，いまや誰もが知つているが，同時にその計算費がかさむことも知られている。

このような現状から，無限に剛な部材を有限の剛性を持つ線材に置き換えて架構の応力解析を行なうことが多い。図6の例ならば，無限に剛な部材の剛性を，その周辺で最も剛性が大きい部材（耐震壁のＡＥ材）の剛性の100倍とするなどの方法によつて，剛域の代用をさせるわけである。

では，100倍で充分に剛であるといえるだろうか。節点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄが互いに剛に結ばれていることをモデル化するためには，この倍率は大きいほど良いはずである。しかし，コンピュータを利用してこのような解析を行なつたことのある人なら，誰でも経験することだが，構造物の中に部分的に非常に剛な部材を含めると，数値計算そのものの精度が悪くなり，場合によつては発散するという問題につきあたる。このような理由で，無限に剛な部材を含む架構の応力解析を行なう場合には，剛性の倍率を恐る恐る大きくしていつて，解の精度を乱さない範囲で，より理想に近い解を得るようにしていることが多い。

## ■ 非常に剛な部材による精度の低下

構造物の中に部分的に非常に剛な部材を入れると，なぜ解析結果の精度が低下するのか考えてみよう。

考察を簡単にするために，図7のような，有限の剛性を持つたバネkと無限の剛性を持つたバネKを直列につないだ系を考え，この系の全体としてのバネ$\bar{K}$を求める問題を採りあげる。

まず，この問題を人間がやれば，「系の両端を$P$の力で引つ張る場合を考え，そのときの両端の伸びを$\Delta$とすれば$\bar{K}=P/\Delta$である。バネKが無限に剛であるから，伸び$\Delta$はバネkの伸びに等しく，$k=P/\Delta$となる。したがつて，$\bar{K}=k$である」といつたふうに暗算でも求められる。他の方法もあるが，いずれにしても，無限に剛なバネKの変形を，すばやくゼロとするところが要点である。

次に，マトリックス変位法でこの問題を表現し，実際にコンピュータの中で計算される手順にしたがつて，kとKがどのようにからみ合つて計算されるかを見てみよう。マトリックス法での力（$P$）や変位（$\delta$）の表示方法と正の向きは図8のようにとるものとする。

バネkの剛性マトリックスは

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

である。(1)式を代数的に表示すれば，次の2つの式となる。マトリックスに不慣れな人は，これにならつて代数式に置き換えて考えれば理解しやすい。

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= k\delta_1 - k\delta_2 \\ P_2 &= -k\delta_1 + k\delta_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

同様に，バネKは(2)式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \cdots\cdots (2)$$

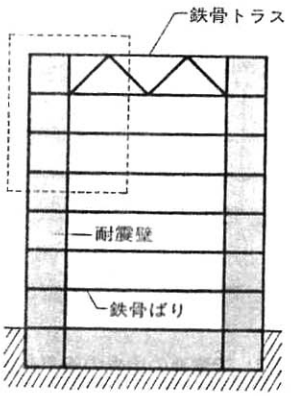



図5　口形の大架構C

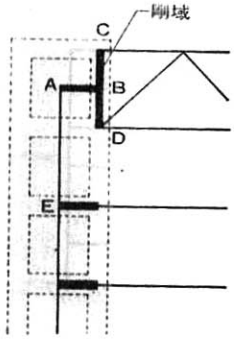



図6　架構Cの左上すみのモデル化

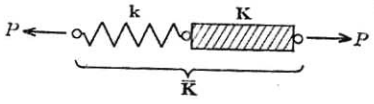



図7　例題のバネの記号（一般的な解き方の場合）

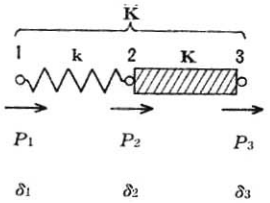



図8　例題のバネの記号（マトリックス法で解く場合）

バネkとバネKを合成した，系全体の剛性マトリックスは，(1)式と(2)式の剛性マトリックスを単純に加算して，

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k+K & -K \\ 0 & -K & K \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(3)$$

となる。節点2には外力が作用しないから，2行目の式

$$P_2 = -k\delta_1 + (k+K)\delta_2 - K\delta_3$$

において $P_2=0$ とおけば

$$\delta_2 = \frac{1}{k+K}(k\delta_1 + K\delta_3) \quad \cdots\cdots(4)$$

となり，$\delta_2$ は $\delta_1$ と $\delta_3$ により表わせる。(4)式を(3)式の1行目と3行目に代入することにより，$P_1$, $P_3$ と $\delta_1$, $\delta_3$ の関係，すなわちバネ$\overline{K}$の剛性マトリックスが得られる。

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{k+K} \begin{pmatrix} -k^2 & -kK \\ -kK & -K^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k - \frac{k^2}{k+K} & -\frac{kK}{k+K} \\ -\frac{kK}{k+K} & K - \frac{K^2}{k+K} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(5)$$

この式をさらに整理すると

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \frac{kK}{k+K} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(5')$$

となるから，Kが無限大であることを考慮すると，

$$\overline{K} = \frac{kK}{k+K} = \frac{k}{k/K+1} = \frac{k}{0+1} = k \quad \cdots\cdots(6)$$

となつて，たしかに暗算の答えと一致している。

しかしながら，コンピュータの中では，(5)式から(5′)式への展開も，ましてや(6)式のように展開してKが無限大だからk/K=0などという高級な演算は行なわれない。コンピュータの中では，(5)式によつて計算されるのである。ちなみに(5)式の $\overline{K}_{22}=K-K^2/(k+K)$ を，有効けた数を6けたとし，k=1，K=10 000として計算すると，

$$\overline{K} = 10\,000 - \frac{10\,000 \times 10\,000}{1+10\,000} = 10\,000 - \frac{100\,000\,000}{10\,001}$$

$$= 10\,000 - 9999.00???? = 0.99???? \quad \cdots\cdots(7)$$

となる。このように6けたの有効けた数を持つコンピュータで計算しても2けたの精度しか保てないわけで，K=1 000 000とした場合には$\overline{K}$の値はまつたく意味のないものになる。

## ■ 無限に剛な部材を数学的に処理する方法

一般に行なわれている，無限に剛な部材を有限な剛性を持つ部材に置き換える方法を用いるかぎり，剛性の倍率を恐る恐る変えて行かざるを得ず，そのような部材を多く含む構造物を想定すれば，この方法を詰めていつても解決にならないことが分る。

ここで，Kが無限に剛であるということに立ち戻つて，もう一度この問題を考えてみよう。(5)式の剛性マトリックスが $\overline{K}=K-K^2/(k+K)$ などの式にならず，すべて $\overline{K}=k$ となる方法を考えればよいわけである。

図8において，Kが無限に剛だから，節点2と3の変位は等しく，節点2にバネkから働く力は節点3に働くべき力に等しいはずである。この関係を節点1を含めて表示すれば

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(9)$$

となる。先にも示したように，バネkの剛性マトリックスは

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(10)$$

であるから，(8)，(9)，(10)式を連続的に代入して，

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(11)$$

となり，これを計算すれば(12)式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(12)$$

当然のことながら，この結果は前の答えと一致しており，剛性マトリックスはすべて$\overline{K}=k$となつているので，コンピュータの中での計算によるけた落ちについてもまつたく問題はない。

このような結果になつたのは，無限に剛な部材の力と変位がその両端でそれぞれ等しいという条件（8，9式）を，全体の剛性マトリックスを作る段階で採り込んだからである。

以上のような操作は，実際のプログラムでは，どの部材が無

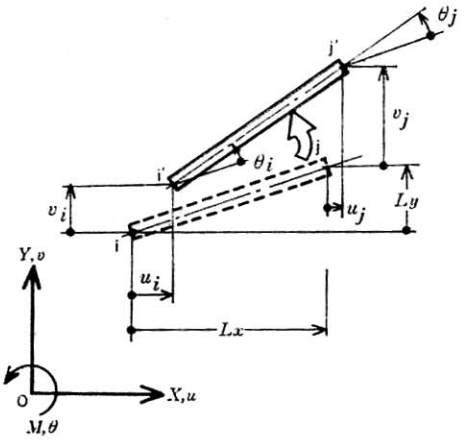
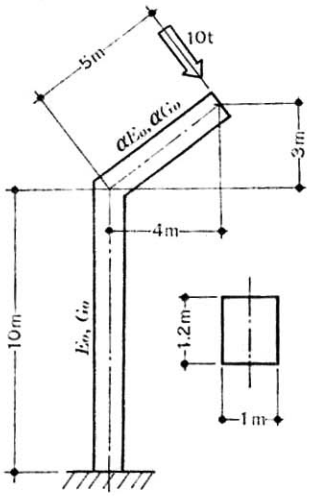
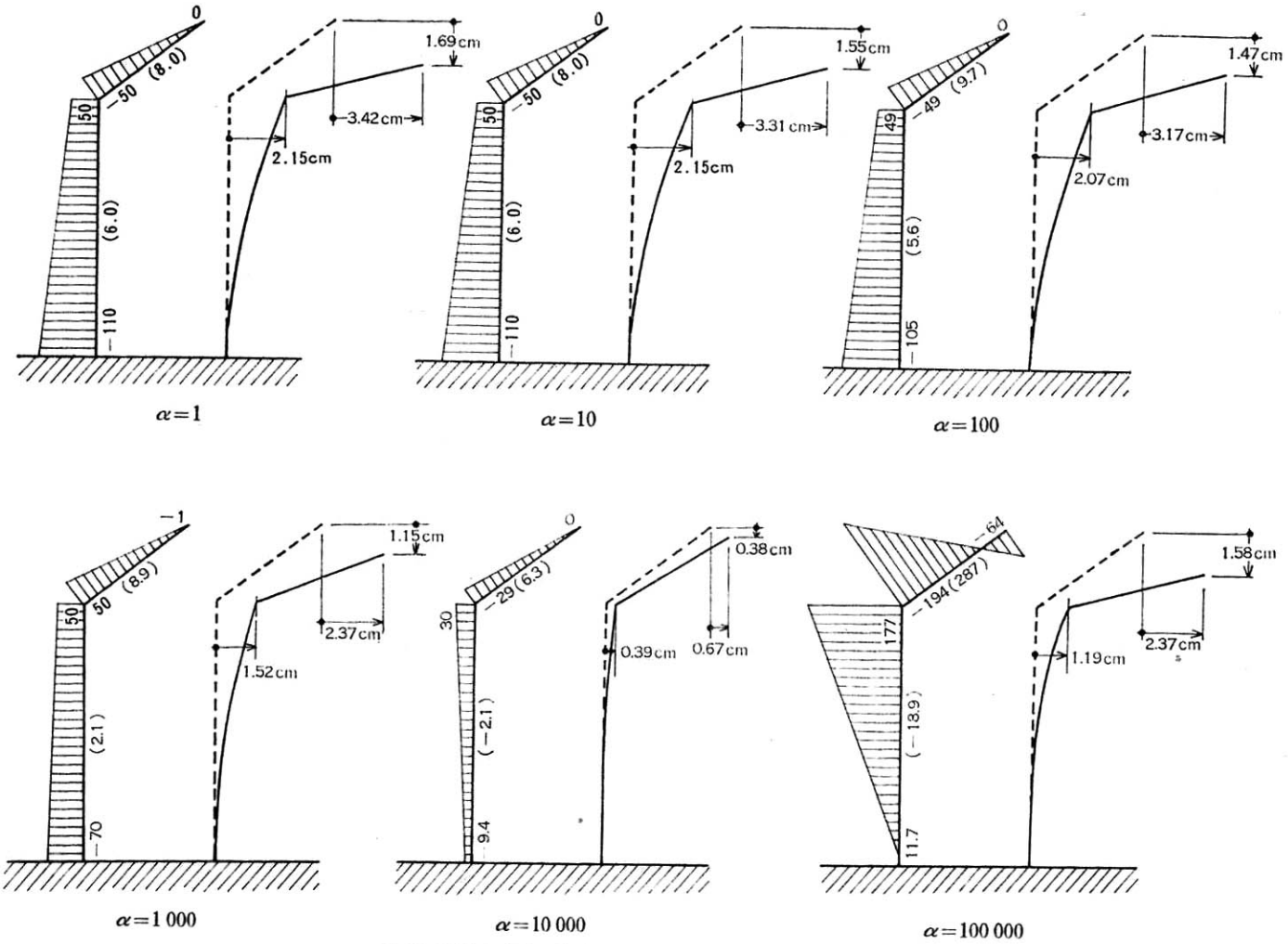



**図 9　無限に剛な部材の両端の変位の関係**($X, Y$ は力, $M$ は曲げモーメントを表わす)




部材断面の諸性能
$A = 1.2\text{m}^2$
$I = 0.1\text{m}^4$
$As = 0.8\text{m}^2$
部材の剛性
$E_0 = 2\,100\,000\text{t/m}^2$
$G_0 = 900\,000\text{t/m}^2$

**図10　精度の検討のための例題**




注) 1) 部材端の数字は曲げモーメント，カッコ内はせん断力を示す。
2) 図中の太字の数値だけが正解と一致している。

**図11　精度の検討結果**（応力図および変形図）

に剛な部材であるかという情報を，データとして入力できるようにすることによつて可能になる。ここでは，軸力だけが作用する直線材という単純な例をとり上げたので，無限に剛な部材の両端の力と変位が等しくなつたが，平面骨組の場合の一般的な力と変位の関係は，(13)と(14)式で表わされる（図9参照）。

$$\left.\begin{aligned} X_i &= X_j \\ Y_i &= Y_j \\ M_i &= M_j - L_y \cdot X_j + L_x \cdot Y_j \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\left.\begin{aligned} u_j &= u_i - L_y \cdot \theta_i \\ v_j &= v_i + L_x \cdot \theta_i \\ \theta_j &= \theta_i \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

なお，(14)式により $u_i$, $v_i$, $\theta_i$ を未知数とする場合には $u_j$, $v_j$, $\theta_j$ は未知数として残らないことになる。

## ■ 簡単な例題による精度の検討

いままでに述べてきたことを，ごく単純な架構をとり上げて検討してみよう。検討用の架構と外力を図10に示す。

図11は，6けたの有効けた数のコンピュータで実際に解析した応力と変形を並べたもので，左端が図10のモデルにおける斜め材の剛性倍率 $\alpha=1$ の解である。正解であることは暗算で確認できる。それより右のものは，斜め材の剛性を図10のモデルの10倍，100倍，1 000 倍と1けたずつ上げていつたときの解を示している。静定構造であるから，剛性が変化しても応力は変わらないはずである。

この結果を見ると，倍率が100 のときでも，鉛直材のせん断力の誤差は6.7%になつており，倍率が1 000倍以上の場合の解は使いものにならないことが分る。倍率が1 000 倍以上の解の変形を見ると，解が発散している様子がよく分る。

以上に見てきたように，コンピュータを使つてマトリックス変位法により構造物の応力や変形を求める場合，その構造物の中に部分的に非常に剛な部材があると，ごく単純な架構でも，解が不安定になることが分つた。また，解の精度を確保するためには，単に数値の有効けた数を増すだけでは，本質的な解決にならないことも分つた。結論として，できる限り正しい解を得るためには，架構のモデル化に気を配るとともに，得られた解をうのみにしないで，注意深く検討する習慣を身につけることが，大切であるといえよう。

（筆者の方々・㈱日建設計構造設計主管　堀井昌博，同技術主査　和田　章）