岩田　衛・和田　章

立体トラスに関する力学的及び幾何学的な考察

I　構造物の規模の可能性についての算術的考察

エジプトのピラミッド，バベルの塔，奈良の大仏殿，京都清水寺の舞台，ローマのサンピエトロ寺院，ニューヨークやシカゴの超高層ビル，サンフランシスコのゴールデンゲートブリッジ，雨天でも野球のできるヒューストンアストロドーム，東京代々木のオリンピックプール，海洋開発のために海上に建設された大型プラットフォーム……等，大きな構造物は人間の夢であり，そうしてできたものは人間の知恵の結晶である。

これらは写真をみただけでもそうであるが，実際にその構造の近くにゆき，前に立ち，中に入つたとき，その感動は人間の一生の間忘れられないほどの大きなものである。より高く，より広くの願いのために，人は文明の歴史の流れの中で優れた直感，或は経験によつて，そして近時のコンピューターの発達を背景とした論理の展開によつて夢を実現しつつある。

構造物の規模の可能性は，その時代の技術レベルによつて決る。構造材料の強度，部材の接合方法，接合部の強度，構造力学の進歩，解析技術の進歩，構造の考え方の変遷，施工技術の進歩等に裏付けされている。然し基本的には構造物の規模の可能性には，それに用いる構造材料の強度重量比が最も重要な影響をもつ。

ここでは，(1)構造物の高さの可能性，(2)梁としてのスパンの可能性，(3)体育館等の屋根の平面的な広さの可能性について簡単な考察を行い，強度重量比を高めるためにも，直方体の梁よりもI形梁，I形梁よりもラチス梁が大スパンには向いていること，大空間をつくるための屋根は，一板スラブより，リブ付きスラブ，それよりも立体トラスを用いるのが最も適していることを示す。

1　高さの可能性

地球上に現存するもので最も高いものはエベレスト山である。人間がつくつたもので最も高いものはモスクワのタワーであり，シカゴのシアーズタワーはビル建築としては最も高いが，何れにせよエベレスト山の1/10以下のスケールである。

最上端から最下端まで同断面の棒があるとき，それが風の力や座屈等の原因で崩壊することを無視し，最下端での圧壊を限度として考えたとき，どこまでの高さが可能であろうか。許容耐力を σ(kg/cm²)，比重を ρ(g/cm³) とすると，限界高さ h(m) は，

$$h=\frac{10\cdot\sigma}{\rho}\text{(m)} \qquad (1)$$

となる。

鉄筋コンクリートを材料として考えると $\sigma_c=70$kg/cm²，$\rho_c=2.4$g/cm³ であるから，その高さの可能性 h_c は，

$$h_c=\frac{10\times 70}{2.4}=292\text{m} \qquad (2)$$

となる。

鋼材を材料として考えると $\sigma_s=1600$ kg/cm²，$\rho_s=7.85$g/cm³ であるから，その高さの可能性 h_s は，

$$h_s=\frac{10\times 1600}{7.85}=2038\text{m} \qquad (3)$$

となる。

これを下の方ほど断面積を増して，どの高さにおいても鉛直方向の応力度が一定になるように考えると，その形状は次に示すような関数で表わせる。

構造体上端から下向きに測つた長さを z，その点における断面積を $A(z)$，最上端にのつている構造体以外の重量を W_0 として

$$\sigma\cdot A(z)=W_0+\int_0^z \rho\cdot A(z)dz \qquad (4)$$

の関係を満たすような形状になるはずである。

これを解くと

$$A(z)=\frac{W_0}{\sigma}\cdot e^{\frac{\rho}{\sigma}z} \qquad (5)$$

となる。

(5)式において W_0/σ は最上端の断面積を示すものであつて，それを A_0 とすれば，

$$A(z)=A_0\cdot e^{\frac{\rho}{\sigma}z} \qquad (6)$$

とも書ける。

この結果により，構造物は底面の大きさに制限を設けなければ無限の高さが可能であることになる。

(6)式を，材料が鋼材の場合，鉄筋コンクリートの場合，一般にビル建築の支持地盤として使われる程度の土とした場合について適用し，図1にその曲線を示す。この曲線は $\sqrt{A(z)/A_0}$ を横軸にとり構造物の見付けの幅を図示しているが，土の場合その曲線は富士山の山裾の形を思わせる。

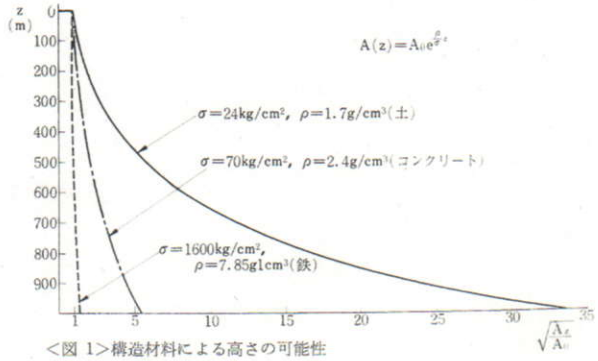
2　スパンの可能性

ガリレオ・ガリレイの著書「新科学対話」はいまから約400年前に書かれているが，現在の材料力学の考え方の始りであるといわれている。この本は3人の人間（サグレド：ヴェネチア市民，サルヴィヤチ：新しい科学者，シムプリチオ：アリストテレス哲学に通じた学者）の対話形式によつて書かれている非常に興味深いものである。この2日目の対話の中に，梁の強度に関する記述がなされており，基本的には「てこ」の原理，つまりモーメントの釣合いによつて議論が進められている。この中に命題1から命題8までを与え，現在の材料力学では常識となつている次に示すようなことに関して面白く書かれている。

断面係数の考え方，等分布荷重を受ける片持梁の固定端モーメントが $\frac{1}{2}WL$ で表わされること，ある材料でつくられた相似形の梁について，その断面係数は大きさの3乗で増えるが，そこに発生する曲げモーメントは大きさの4乗で増えるから，材料の強度が決められている以上，その構造物には自重で崩壊してしまう限界がある等である。更にここで示している理論の実例として，「大きな梁が一定の高さから落下すれば粉砕するのに，同じ事情の下で小さな角材や大理石は壊れない」とか，「小さな犬はおそらく自分と同じ大きさの犬を2，3匹背中に乗せることができますが，これに反して馬は自分と同じ大きさの馬を1頭すら乗せることはできないでしよう」，「幅が厚さより大である棒（というよりは，むしろ角柱）は，力が幅の方向に加えられた場合には，その厚さの方向に加えられた場合より，どれほど多く，そしてどんな比でその破壊に抵抗するか……という命題について，それは縁で立つているときの方が平たく横になつているときより破壊抵抗力が強く，然も幅の厚さに対する比で強いと結論している」，更に「ある片持梁についてどの点も自重に関して同じ抵抗力をもつ形状について述べ，それは放物線の形になる」とか，「一つは中空，一つは中味のある，然し何れも同じ体積と同じ長さをもつた二つの円柱の場合，その抵抗力は互いにその直径の比に等しい」等，現在のパイプ構造や，もう少し広い見方をすればH形鋼の構造形態を予測していたともいえる。

ガリレオ・ガリレイの考えていた梁の破壊する位置での断面内の応力分布は，材料が引張に弱く，圧縮では壊れないと考えていたのであろうが，中立軸を断面の圧縮側の最外縁に仮定し，断面内は総て引張耐力の応力分布が一様に働いていると考えていた。その意味で弾性設計的に見直すと若干おかしな点もある。然しこの仮定は次元解析的には弾性設計で用いている断面係数と一致するし，むしろ塑性の断面係数に近い考え方ともいえ，マクロ的には全く現象をよく説明している。

両端が単純支持されている等分布荷重を受ける梁について弾性設計的に簡単な考察を行つてみる。実際の梁の設計には，撓みの問題，振動問題，座屈の問題，ラーメン構造の部材として用いられるときには柱の剛性，耐力とのバランス等，考えるべきことは多いが，



<図 1>構造材料による高さの可能性

ここでは大スパンを単純梁で架けるときにその中央の曲げモーメントに関する弾性強度と端部の剪断強度についてのみの議論とする。

梁の単位長さ当りの自重と受持つべき分布荷重の和を，その梁の断面積で割つて，みかけの比重を求め，それを ρ' とする。

$$\rho'=\alpha\rho \tag{7}$$

ここにおいて α は梁の自重に対する自重と分布荷重の和の比である。

σ をその梁の引張または圧縮の許容応力度とし，梁の幅を b，成を d，長さを l とすると，この梁がちようど許容耐力になつているときには，

$$\sigma\cdot\frac{bd^2}{6}=\frac{1}{8}\rho' bdl^2$$

整理すると $$\frac{3\rho'}{4\sigma}=\frac{d}{l^2} \tag{8}$$

を満足しているはずである。

(8)式はガリレオ・ガリレイのいつているようにスパンを大きくするためには，その2乗の比で梁成を大きくしなければならないことを示している。更に，ある決められた梁成の中で大きなスパンの構造をつくるためには，できる限り（ρ'/σ）の小さい構造材料と構造形式を選ぶべきであることも示している。

ここで，剪断力に関する議論を進めてみる。剪断に関する許容応力度を τ として，梁の断面内での剪断応力の分布による係数を κ とすると，剪断力によつてちようど壊れるときの釣合い式は，

$$\frac{\tau bd}{\kappa}=\rho' bd\cdot l/2$$

整理すると，$$\frac{2\tau}{\kappa\rho'}=l \tag{9}$$

となる。この式は，ある断面形状が決れば，可能なスパンの限界は決つてしまうということである。

鉄筋コンクリートの梁について(8)，(9)式を計算しグラフ化すると図2のようになる。この図においてσは鉄筋コンクリート梁がおよそ釣合鉄筋比程度の配筋がされているとして70kg/cm²，τは7kg/cm²として計算してある。

図2によつて $\alpha=3$，$d/l=1/10$ 程度とすると，この鉄筋コンクリートの梁のスパンは12mぐらいが限界であることが判る。鉄骨鉄筋コンクリート梁にして ρ'/σ の値を下げ，鉄骨のウェブによつて剪断強度を高めれば，当然であるが，スパンの可能性は大きくなる。更にガリレオ・ガリレイがいつているように，端部が固定の梁でないと無意味であるが，中央の断面形を小さくして自重を減らす等の考え方をすれば，更にスパンの可能性は大きくなる。H形鋼を用いた鉄骨梁ではどうなるであろうか。曲げに対する強度がフランジのみによつて決るとすれば，両側のフランジの断面積の和を A として，梁成を d，スパンを l，$\rho'=\alpha\rho$ とすると，

$$\sigma\frac{A}{2}d=\frac{\rho' Al^2}{8}$$

となるから，これを整理して，

$$\frac{\rho'}{4\sigma}=\frac{d}{l^2} \tag{10}$$

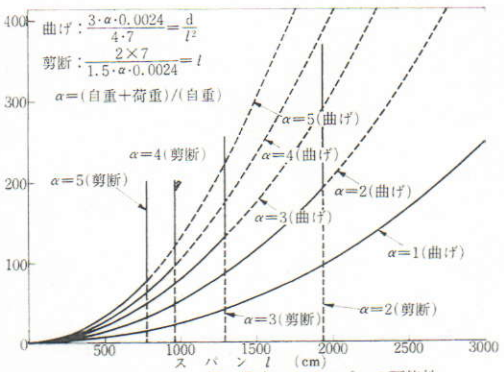
となる。(8)式と比較すると $3\rho'/4\sigma$ が $\rho'/4\sigma$ となつている。この値は(8)式について鉄筋コンクリート梁，(10)式について鉄骨梁を対応させると，

$3\rho'/4\sigma=3\cdot\alpha\cdot 0.0024/4\times 70=0.257\times10^{-4}$

$\rho'/4\sigma=\alpha\cdot 0.00785/4\times 1600=0.123\times10^{-5}$

となり，鉄筋コンクリート梁に比べて鉄骨梁の方が，大スパン構造への可能性が $\sqrt{20}$ 倍ほど大であることが判る。但しこの議論の中には，ウェブの重量と，その剪断強度に関する考えがぬけている。一般に，スパンの大きい鉄骨梁はそれに応じて梁成も大きくなるため梁のウェブは，その剪断応力度では決らず，剪断座屈を防ぐための幅厚さ比によつてウェブの板厚は決められる。それ故，ウェブの重量もフランジに比較して無視はできないから，先に示したスパンの可能性の係数は，$\sqrt{20}$ 倍より小さい数値になるであろう。

大スパン構造を有利につくるためには，腹材の重量を少くし有効に剪断力を伝える斜材を用いるトラス構造がある。このようにすれば，斜材はフルウェブに比較すれば軽いから，鉄筋コンクリート梁の $\sqrt{20}$ 倍に近いスパンの可能性があるといえる。スパン全長に亘つて，梁成を一定にして議論を進めてきたが，応力に応じて梁成や部材の断面を変えたり，アーチや吊構造を構造形式として用いれば，更にスパンの可能性は高められる。特に吊橋はテンション構造であるから，そのスパンの可能性の議論はⅠ-1で述べた高さの可能性の議論と同じ次元の問題になるであろう。



<図 2>鉄筋コンクリート梁の梁成によるスパンの可能性

3 広さの可能性

広さの可能性について考察する前に，床スラブの曲げモーメントの算定式について考えてみる。ほぼ正方形に近い形をしたスラブについては，その発生する曲げモーメントは，周辺固定スラブについても，単純支持スラブについても，各々1方向スラブとして考えた場合の約½の値になつている。辺の比が1.5から2に近くなるとその短辺方向の曲げモーメントの最大値は一方向スラブとして考えた場合の値にほぼ等しくなる。一方向スラブは，梁の幅をそのまま広げたものと考えられるから広さの可能性についての議論は，ほぼ梁についての議論がそのまま適用できる。梁について考察していたとき，充実長方形断面梁よりも，H形鋼梁，トラス梁の方が軽量で大スパン構造に向いていることを述べたが，床スラブについても，大きな広さを1枚スラブでつくるより，適当に小梁で力を集めて床スラブを薄くした方が経済的な床構造ができる。体育館等の屋根をつくるためには，鉄骨梁を用いる方が大きな空間をつくることができるし，トラス梁，更には立体トラスを用いるのが最も重量強度比 ρ'/σ を小さくできるので，大空間をつくるのに向いている。これらについての詳しい議論や例題を用いた考察はⅡ章以下で述べるが，大空間を形成するために，梁についてのアーチや吊構造に対応した，ドームや球面構造や吊形式の屋根を用いるのが大空間への可能性を更に増すことは明らかであろう。何れにせよ，一般的に大規模の空間をつくるためには立体トラスは重量強度比 ρ'/σ が小さいために最適な構造形式であるといえる。

Ⅱ 立体トラスの力の流れ

1 立体トラスの規模の可能性

Ⅰ章の議論を踏まえて，立体トラスの規模の可能性について論じてみる。

立体トラスは，部材を図3に示すように，ジョイント部分で3本以上繋ぎ合せて，曲面や平面を構成している。

立体トラスの設計をする際には，形状，グリッドパターン，スパン，デプス，部材断面，部材材料の強度，剛性，密度などのファクターがあり，これらのファクターを変えることによつて部材応力は変化する。夫々のファクターの部材応力に対する影響度合いが判つていれば，与えられた条件のもとでの規模の可能性，いい換えれば適切な設計（構造体の自重の軽減など）を行うことが容易となる。

スラブやシェル構造など，連続体の面に分布する応力の流れから，一般的な複層立体トラスの応力の流れを考察することができる。

鉛直荷重時（長期設計荷重）における単位面積当りの荷重 P は，一般に構造体の自重を P_S，仕上材重量と雪荷重等を P_L とすると，

$$P=P_L+P_S \tag{11}$$

と表わされる。また連続体による曲面を考えると，応力は膜応力と曲げ，剪断応力とに分けることができる。膜応力が受持つ荷重を P_m，曲げ，剪断力が受持つ荷重を P_b とすると，

$$P=P_m+P_b \tag{12}$$

と配分することができる。連続体における各応力は，

膜応力 $S=C_1\cdot P_m\cdot a$ (13)

C_1：構造形式，形状によつて決る形状係数

P_m：膜構造として受持つ荷重

a：スパン

曲げ応力 $M=C_2\cdot P_b\cdot a^2$ (14)

C_2：形状係数

P_b：曲げ構造として受持つ荷重

剪断応力 $Q=C_3\cdot P_b\cdot a$ (15)

C_3：形状係数

これら連続体の応力より，複層立体トラスの部材軸力は次のようになる。

膜応力 S による上下弦材の軸力 N_n は

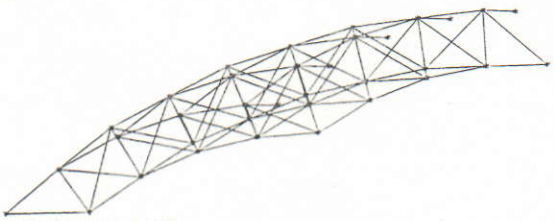
$$N_n=C_4\cdot S\cdot b \tag{16}$$

C_4：形状係数

S：膜応力

b：弦材のグリッドピッチ

曲げ応力 M による上下弦材の軸力


<図 3>立体トラスの例

N_b は

$$N_b = C_s \cdot M \cdot b/d \quad (17)$$

C_s：形状係数

M：曲げ応力

d：立体トラスのデプス

剪断応力Qによる斜材の軸力 N_Q は

$$N_Q = C_6 \cdot Q \cdot b \quad (18)$$

C_6：形状係数

Q：剪断応力

となり，(13)，(14)式を夫々(16)，(17)式に代入して，

$$N_m = C_m \cdot P_m \cdot a \cdot b \quad (19)$$

C_m：形状係数

$$N_b = C_b \cdot P_b \cdot a^2 \cdot b/d \quad (20)$$

C_b：形状係数

結局，上下弦材の軸力Nは，

$$N = N_m \pm N_b = (C_m \cdot P_m \pm C_b \cdot P_b \cdot a/d) \cdot a \cdot b \quad (21)$$

また(15)式を(13)式に代入して，剪断応力による斜材の軸力は，

$$N_Q = C_Q \cdot P_b \cdot a \cdot b \quad (22)$$

C_Q：形状係数

と表わすことができる。

次に，軸力から必要とされる単位面積当りの構造体自重 P_s を求めてみる。1本の弦材の重量 w_s は，許容応力度 f の逆数と軸力と長さの積に比例するので，(21)式より，

$$w_s \propto \frac{1}{f}(C_m \cdot P_m + C_b \cdot P_b \cdot a/d) \cdot a \cdot b \cdot b \quad (23)$$

いま正方形グリッドとすれば，弦材の本数 n は，$(a/b)^2$ に比例するので，

$$n \propto (a/b)^2 \quad (24)$$

である。

以上のことと，実際的な立体トラスにおいて，斜材重量は，弦材重量にほぼ比例していることを考え合せて，全重量Wは，次式で表わせる。

$$W \propto n \cdot w_s \propto \frac{1}{f} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot (C_m \cdot P_m + C_b \cdot P_b \cdot a/d) \cdot a \cdot b^2 \quad (25)$$

また $P_s = W/a^2$ であるから，

$$P_s = \frac{1}{f} \cdot (\alpha \cdot P_m \cdot a + \beta \cdot P_b \cdot a^2/d) \quad (26)$$

α，β：形状係数

と整理できる。

荷重の増加と共に膜構造に関しては，スパンに比例し，曲げ構造に関しては，スパンの2乗に比例して，構造材料が増すことになる。

ここで，膜構造である場合を考え，$P_b = 0$ とすると，(26)式より，

$$P_s = \frac{1}{f} \cdot \alpha \cdot P_m \cdot a \quad (27)$$

これを，$P_m = P_L + P_s$ に代入すると，

$$P_s = P_L \Big/ \left(\frac{f}{\alpha a} - 1\right) \quad (28)$$

或は，$\alpha = \frac{P_s}{P_L + P_s} \cdot \frac{f}{a}$ (29)

また曲げ構造である場合を考え，$P_m = 0$ とすると，(26)式より，

$$P_s = \frac{1}{f} \beta \cdot P_b \cdot a^2/d \quad (30)$$

これを，$P_b = P_L + P_s$ に代入すると，

$$P_s = P_L \Big/ \left(\frac{d \cdot f}{\beta a^2} - 1\right) \quad (31)$$

或は，$\beta = \frac{P_s}{P_L + P_s} \cdot \frac{d \cdot f}{a^2}$ (32)

ある形状の立体トラスについて，設計が完了している場合，P_s が判ると，膜構造か曲げ構造のどちらに近いかによつて，(29)或は(32)式により，α，β が定まる。また(28)，(31)式から，P_s が無限大となるスパンがあることが判る。即ち，

(28)式より　$a = f/\alpha$ (33)

(31)式より　$a = \sqrt{d \cdot f/\beta}$ (34)

のときは，自重により構造物は破壊する。一般の立体トラスは，膜構造と曲げ構造の混ざつた構造であるが，何れにしてもスパンには限界があることになる。

次に，図4に示す立体トラスが設計できているとして，図5に示すようなスパン，グリッド，デプスを比例的に大きくした場合の限界を考えてみる。原設計の弦材軸力及び単位面積当りの構造体の自重は，

(11)式より　$P_0 = P_L + P_{S0}$ (35)

(21)式より　$N_0 = (C_m \cdot P_m + C_b \cdot P_b \cdot a/b) \cdot a \cdot b$ (36)

(26)式より　$P_{S0} = \frac{1}{f}(\alpha \cdot P_m \cdot a + \beta \cdot P_b \cdot a^2/d)$ (37)

となる。

スパン，グリッド，デプスを総て k 倍とした図5の立体トラスについて，構造体の自重 P_S が，

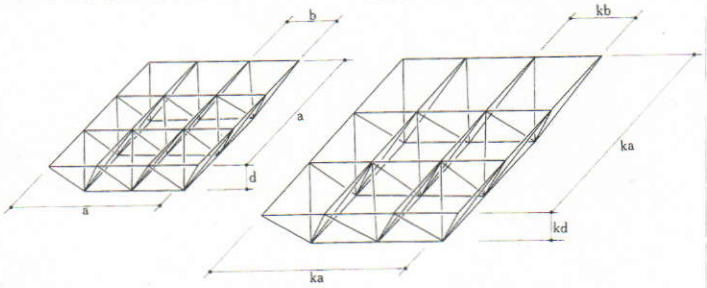
$$P_S = \gamma \cdot P_{S0} \quad (38)$$

であるとすると，

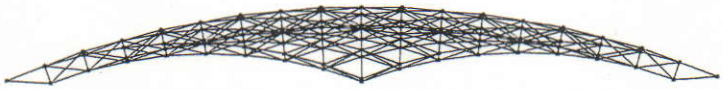
(11)式より　$P = P_L + \gamma \cdot P_{S0}$ (39)

即ち，$P/P_0 = (P_L + \gamma \cdot P_{S0})/(P_L + P_{S0})$ (40)

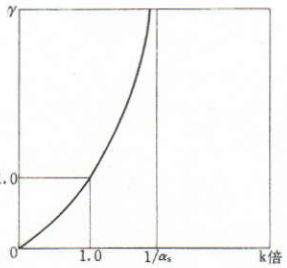
比例的に大きくしたために，膜構造と曲げ構造の分担の比率は変らないと考えられるので，



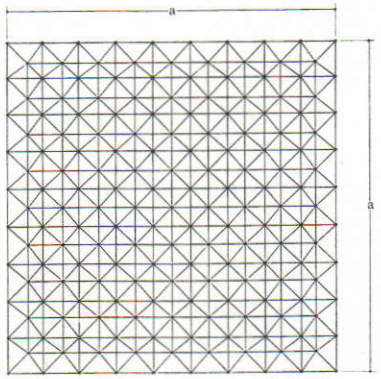
<図 4>　<図 5>



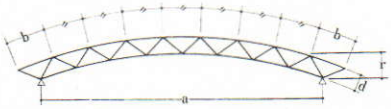
<図 7>(a)複層の球面立体トラス



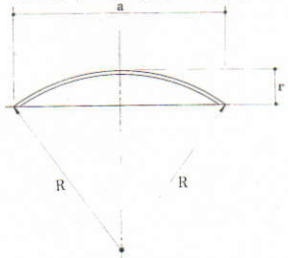
<図 6>$\gamma = P_S/P_{S0}$ と k の関係



<図 7>(b)複層の球面立体トラス（平面図）



<図 7>(c)複層の球面立体トラス（断面図）



$R^2 = (R-r)^2 + (a/2)^2$

<図 8>曲率半径

(12)式より　$P = \frac{P}{P_0} \cdot P_m + \frac{P}{P_0} \cdot P_b$ (41)

軸力と構造体の自重は，

(21)式より　$N = \left(C_m \cdot P_m \cdot \frac{P}{P_0} + C_b \cdot P_b \cdot \frac{P}{P_0} \cdot \frac{ka}{kd}\right) \cdot k^2 \cdot a \cdot b = \frac{P}{P_0} \cdot k^2 \cdot N_0$ (42)

部材の総長さは k 倍，屋根面積は k^2 倍になるから

$$P_S = \frac{P}{P_0} \cdot k \cdot P_{S0} = \gamma P_{S0} \quad (43)$$

即ち，

$$\gamma = k \cdot (P_L + \gamma P_{S0})/(P_L + P_{S0}) \quad (44)$$

ここで，図4の立体トラスの全荷重のうち，構造体の占める割合 α_S を

$$\alpha_S = P_{S0}/P_0 \quad (45)$$

とすれば，(44)式より

$$\gamma = \frac{P_S}{P_{S0}} = 1 + \frac{k-1}{1-k\alpha_S} \quad (46)$$

となる。図6に示すように k を1から増加していくと，必要とする構造体の自重も増していくが，構造体の自重をいくら増加しても k は $1/\alpha_S$ より大きくすることができないことが判る。また，

$$1/\alpha_S = P_0/P_{S0} = 1 + P_L/P_{S0} \quad (47)$$

であるから，構造体自重以外の荷重に比べて，構造体自重の少いほど，同じ形状のまま比例的に大きな規模にまで拡大できることが判る。但し以上の議論においては，立体トラスの剛性及び座屈等の問題は無視している。

2 ケーススタディー

図7に示すような，複層の球面立体トラスを取上げ，スパン，曲率半径，

<表 1>ケースモデル

曲率半径 R		スパン a(m) 24.0	36.0	48.0	60.0
	$r=a/8$	d=0.2(68) d=0.5(26) d=1.0(16) d=1.5(13) d=2.0(11)	d=0.2(60) d=0.5(26) d=1.0(27) d=1.5(23) d=2.0(20)	*d=0.2(93) d=0.5(54) d=1.0(46) *d=1.5(41) d=2.0(36)	d=0.2(180) d=0.5(107) d=1.0(83) d=1.5(75) d=2.0(68)
	$r=a/16$	d=0.2(99) d=0.5(32) d=1.0(18) *d=1.5(14) d=2.0(11)	d=0.2(116) d=0.5(63) d=1.0(43) *d=1.5(32) d=2.0(28)	d=0.2(291) d=0.5(173) d=1.0(106) *d=1.5(69) d=2.0(55)	d=0.2(—) d=0.5(1,033) d=1.0(316) *d=1.5(185) d=2.0(104)
	$r=a/32$	d=0.2(117) d=0.5(39) d=1.0(25) d=1.5(17) d=2.0(12)	d=0.2(435) d=0.5(147) d=1.0(69) d=1.5(47) d=2.0(34)	d=0.2(—) d=0.5(—) d=1.0(169) *d=1.5(119) d=2.0(81)	d=0.2(—) d=0.5(—) d=1.0(3,773) d=1.5(443) d=2.0(225)
	$r=0$	d=0.2(—) d=0.5(72) d=1.0(27) d=1.5(17) d=2.0(13)	d=0.2(—) d=0.5(1,822) d=1.0(93) d=1.5(50) d=2.0(35)	d=0.2(—) d=0.5(—) d=1.0(531) *d=1.5(148) d=2.0(85)	d=0.2(—) d=0.5(—) d=1.0(—) d=1.5(3,642) d=2.0(275)

注：( ) 内は P_L=100(kg/m²)，f_S=1.0(t/cm²) のときの P_S(kg/m²)　(—) は不可の場合

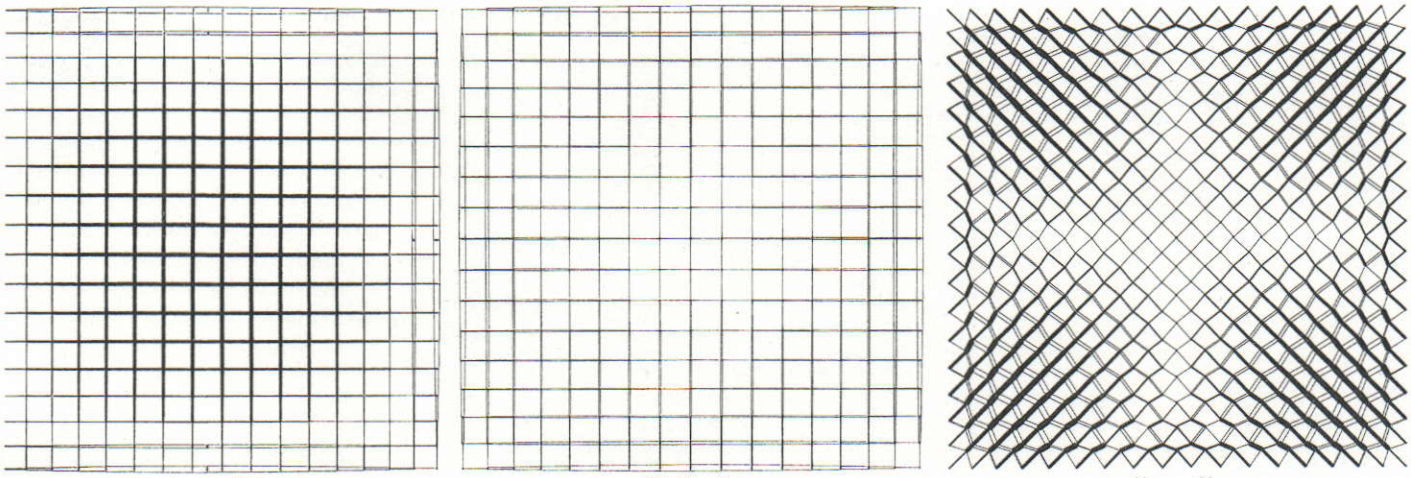
プスを変えた場合の力の流れと構造自重の変り方について考察を行う。

ケーススタディーに用いる立体トラは，表1に示すように，スパン a については24.0，36.0，48.0，60.0mの種類，曲率半径 R については図8に示すように，夫々のスパンに対して，ライズ r が1/6，1/16，1/32，0（フラット）となる4種類，デプス d については，0.2，0.5，1.0，1.5，2.0m の5種類とし，グリッド間隔 b については，3mを基本として，球面トラスの場合は弦材の長さが曲面にそつてできる限り等しくなるように分割する。

計算は，上下弦材の断面積と斜材の比を 1：0.5 とし，周辺をローラー支持して，上弦材の各ジョイントに鉛直荷重を与えて行う。荷重は構造物以外の荷重 P_L と構造物の自重 P_S に分けられるが，全部材のうちの最大引張応力度，或は最大圧縮応力度が許容応力度 f_s となるような部材断面を選ぶことにより，構造物の自重 P_S が計算結果より逆算される。

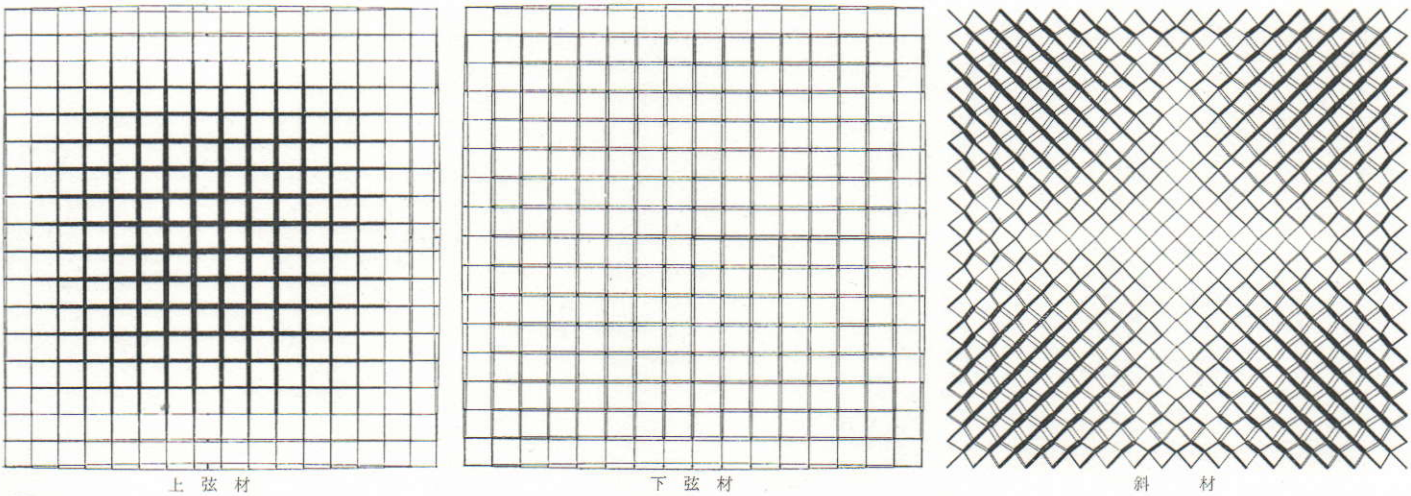
表1に＊で示した8ケースについて，上弦材，下弦材，斜材の応力度分布を図9～16に示す。圧縮軸力を受ける部材は黒塗り，引張軸力を受ける部材は白抜きとして，応力の大きさに比例した幅となつている。

図9～12は，スパンとデプスを一定値 a=48.0m，d=1.5m として，曲



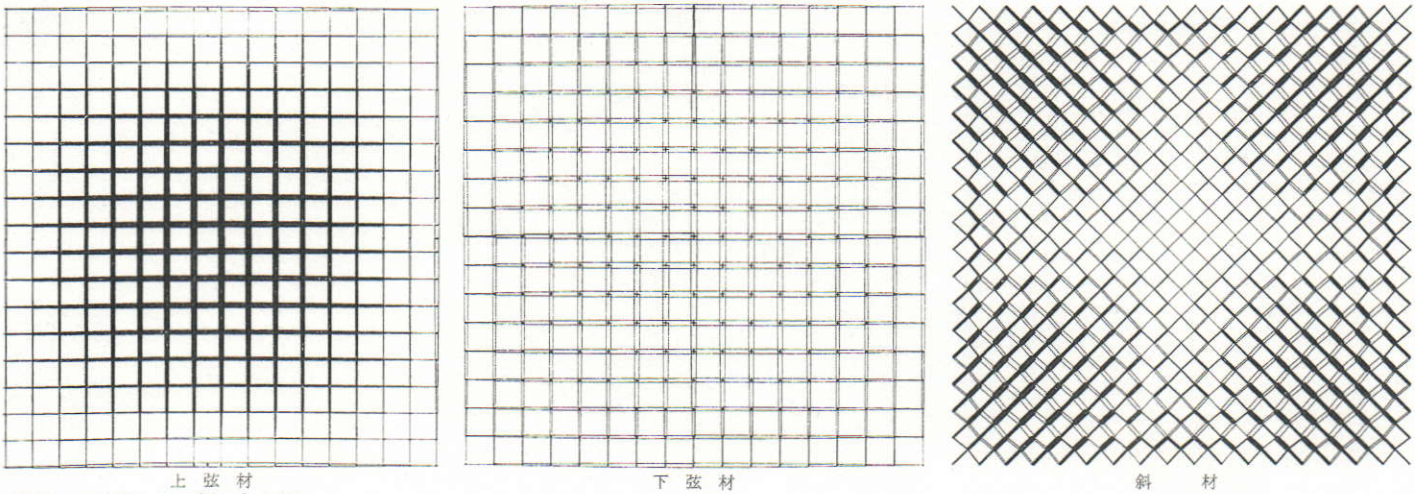
上 弦 材　　下 弦 材　　斜　材

<図 9>a=48.0m，$r=a/8$，d=1.5m



上 弦 材　　下 弦 材　　斜　材

<図10>a=48.0m，$r=a/16$，d=1.5m



上 弦 材　　下 弦 材　　斜　材

<図11>a=48.0m，$r=a/32$，d=1.5m

率半径を変えた場合を示す。フラットの場合は図12のように，中央部で上弦材の圧縮力と下弦材の引張力がほぼ同じ最大値を示し，斜材の軸力は各辺の中央部に向つて大きくなつており，板の曲げ性状を示している。(17)，(18)式の形状係数 C_5，C_6 を求めてみる。立体トラスのグリッドパターンを考慮して，(18)式を

$$N_Q = C'_6 \cdot Q \cdot b \cdot \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{d}\right)^2} \quad (48)$$

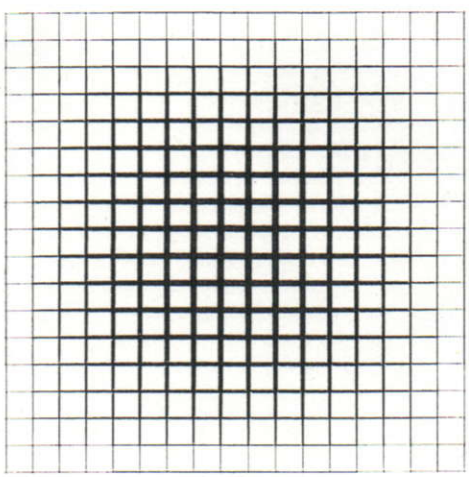
とすると，C_5，C_6' は次式によつて求まる。

$$C_5 = \frac{N_b}{M}\cdot\frac{d}{b} \quad (49)$$

$$C'_6 = \frac{N_Q}{Q}\cdot 2/\left(b\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{d}\right)^2}\right) \quad (50)$$

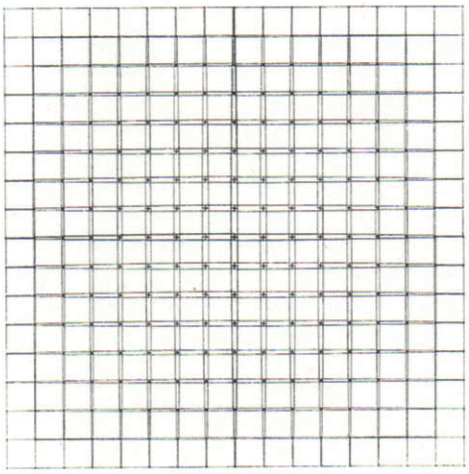
<表 2>形状係数 C_5，C_6'，β (a=48m，r/a=0 の場合)

デプス d(m)	荷重 $P=P_L+P_S$ (t/m²)	板の曲げ 中央 M_C	板の曲げ 辺中央 Q_E	立体トラス解析 中央上弦材 N_B	立体トラス解析 辺中央弦材 N_Q	C_5	C_6'	β
1.0	0.631	55.3	13.9	323.0	37.2	1.95	0.761	365 ×10⁻⁴
1.5	0.248	21.8	5.48	87.6	11.1	2.01	0.780	389 ×10⁻⁴
2.0	0.185	16.2	4.09	48.5	6.91	1.99	0.772	399 ×10⁻⁴

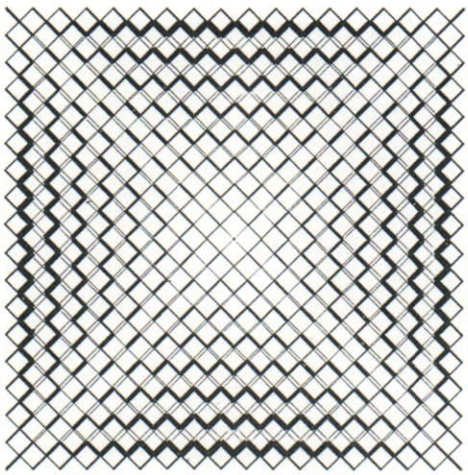


上 弦 材

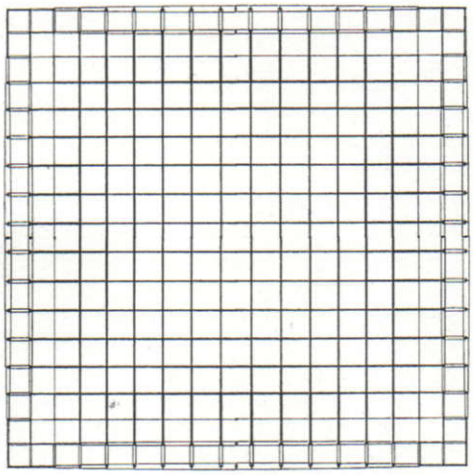
<図12>a=48.0m，$r=a/\infty$，d=1.5m



下 弦 材

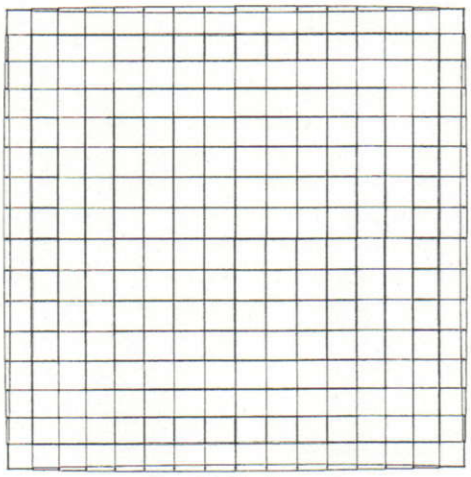


斜 材

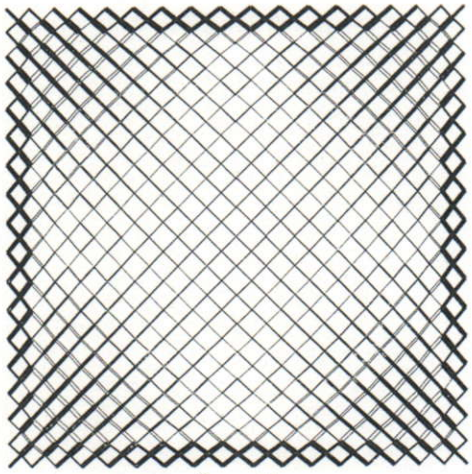


上 弦 材

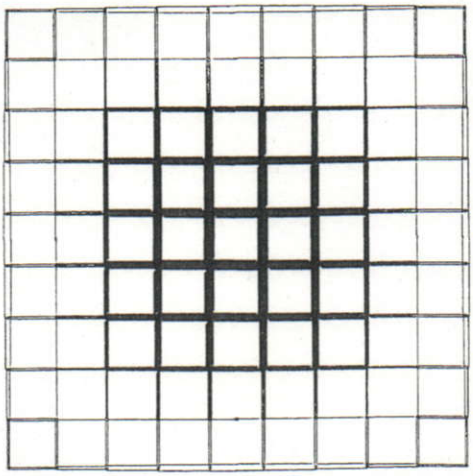
<図13>a=48.0m，$r=a/8$，d=0.2m



下 弦 材

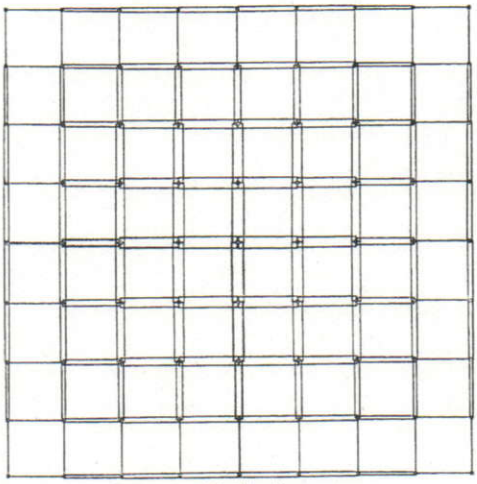


斜 材

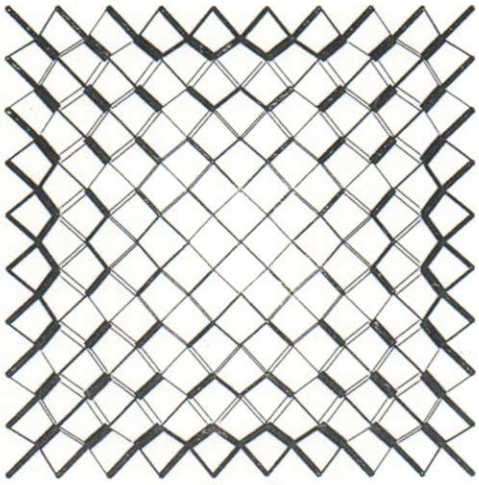


上 弦 材

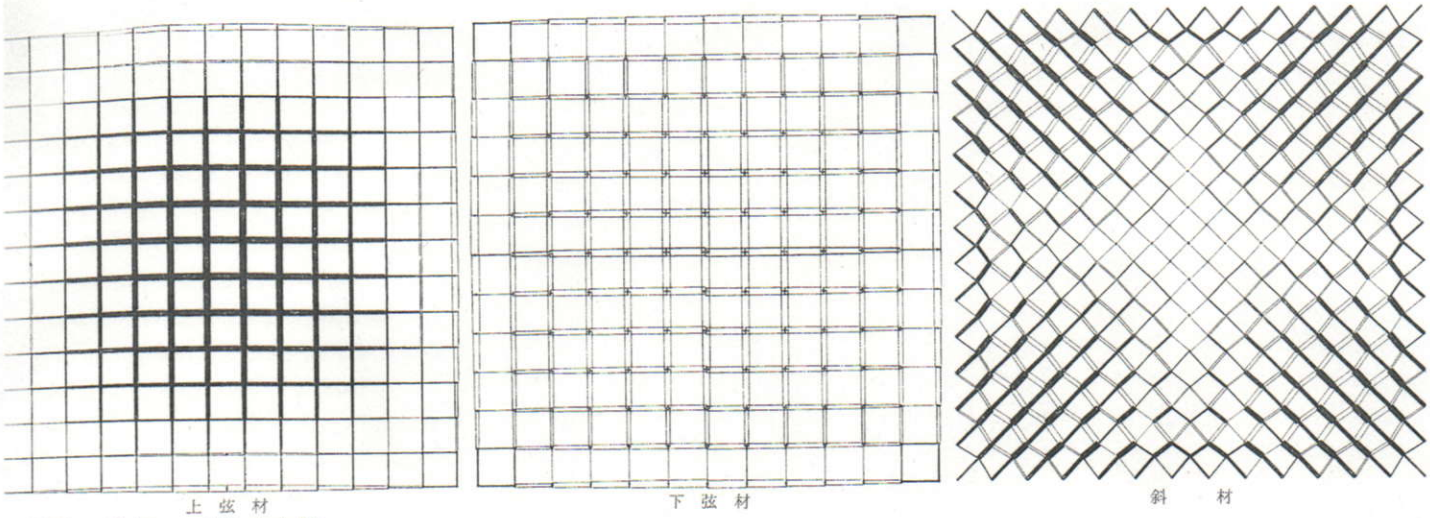
<図14>a=24m，$r=a/16$，d=1.5m



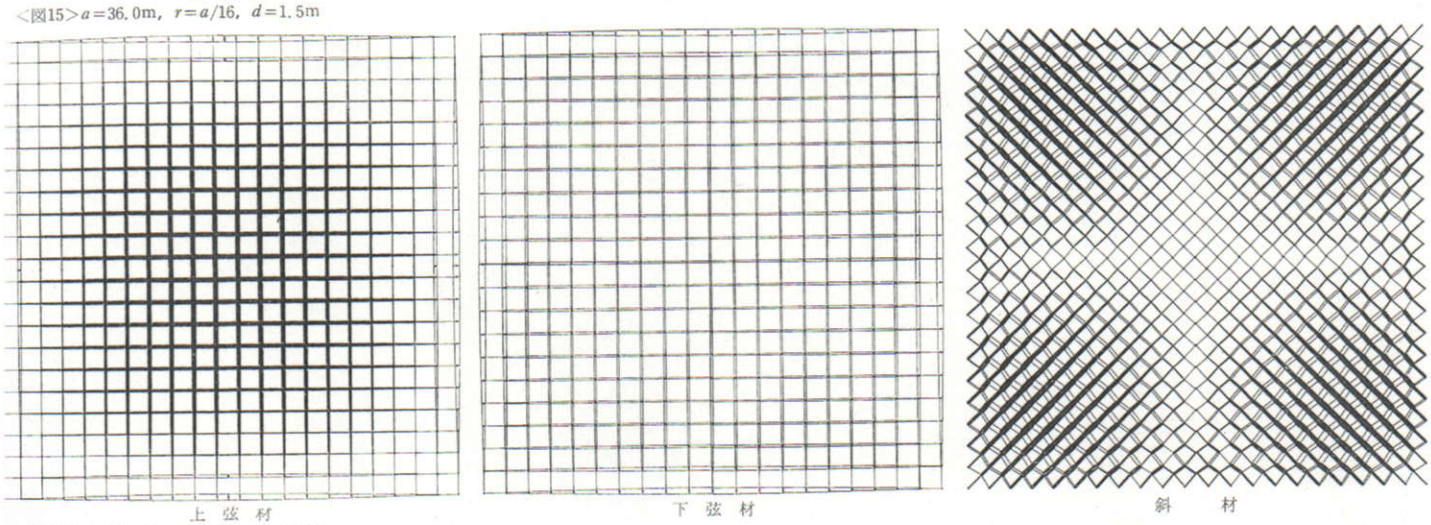
下 弦 材



斜 材



<図15>$a=36.0$m, $r=a/16$, $d=1.5$m



<図16>$a=60.0$m, $r=a/16$, $d=1.5$m

<表 3>形状係数 α ($d=0.2$m, $r/a=1/8$ の場合)

スパン a(m)	デプス d(m)	曲率半径 r/a	P_L(t/m²)	P_S(t/m²)	α
36.0	0.2	1/8	0.100	0.060	1.04×10^{-2}
48.0	0.2	1/8	0.100	0.093	1.00×10^{-2}
60.0	0.2	1/8	0.100	0.180	1.07×10^{-2}

曲げ構造のスパンの限界を示す(32)式の β も同様に算出し表2に示す。C_3, C_6', β は、デプスによらずほぼ一定値となる。$\beta=0.00038$ とすると、(34)式によつてスパンの限界 a_{limit} は

$$a_{limit}=\sqrt{d\cdot f/0.00038}=51\sqrt{d\cdot f}\ (m) \quad (51)$$

となる。

曲率半径が小さくなるに従い、下弦面中央部の引張力が減少し、斜材の軸力は4隅に向つて大きくなり、膜構造の性状が表われてくる。同時に上下弦材周辺部は引張力が増し、所謂テンションリングを形成する。

図13は図9と同じスパン、曲率半径でデプス $d=0.2$m の場合であるが、下弦面中央部に圧縮力が生じており、より膜構造的な性状となつている。また上弦部の外から2本と下弦材の外から1本と、それに挟まれた斜材でテンションリングを形成しているのが判る。

膜構造的な性状を示すものについて、膜構造のスパンの限界を示す(19)式の α を算出すると表3となる。表より $\alpha=0.0104$ とすると、(33)式によつて、スパンの限界 a_{limit} は、

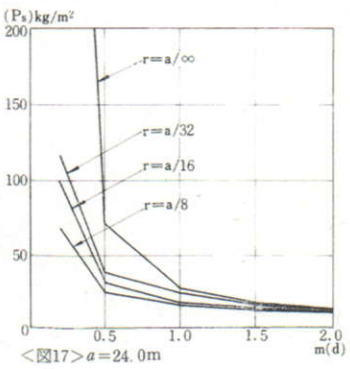
$$a_{limit}=f_S/0.0104=96\cdot f(m) \quad (52)$$

となる。即ち、このような形状の立体トラスのスパンの限界は、$f_S=1.0$t/cm² とすれば96mということになる。

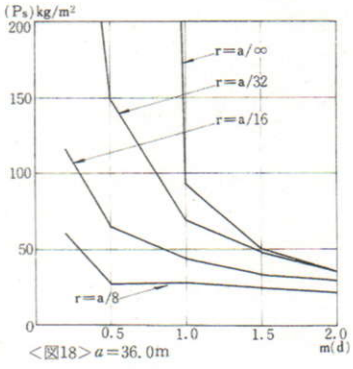
図14～16は、スパンに対する曲率半径とデプスを一定とした場合のスパンの違いによる分布を示したものである。スパンが大きくなるにつれて、スパンに対するデプスが小さくなるため、膜構造的な性状に近づいている。

次に、構造部材の自重 P_S について幾つかの考察を行う。

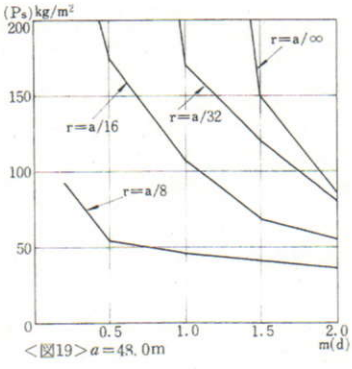
スパンが一定の場合、(26)式によれば、デプスを大きくするほど P_S は少くなり、曲率半径を小さくするほど P_m/P_b は大きくなるため、やはり P_S は少くなるはずである。そこで、図17～20には、スパン別に横軸にデプス d を



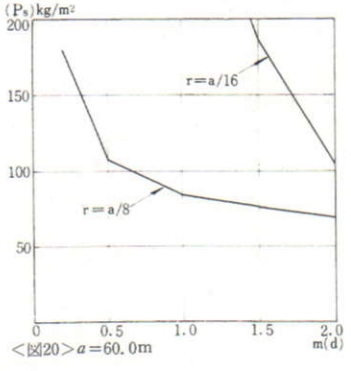
<図17>$a=24.0$m



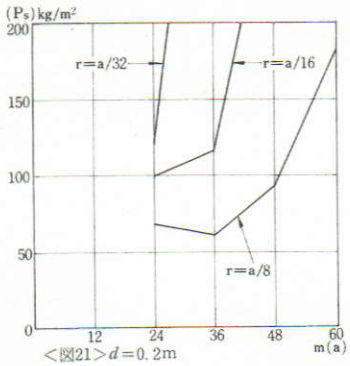
<図18>$a=36.0$m



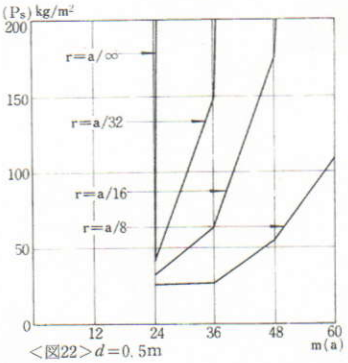
<図19>$a=48.0$m



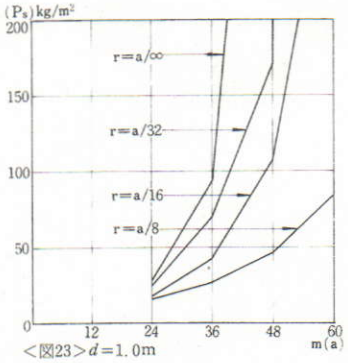
<図20>$a=60.0$m



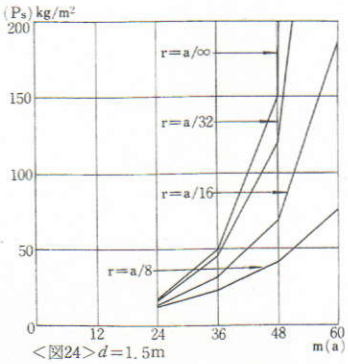
<図21>$d=0.2$m



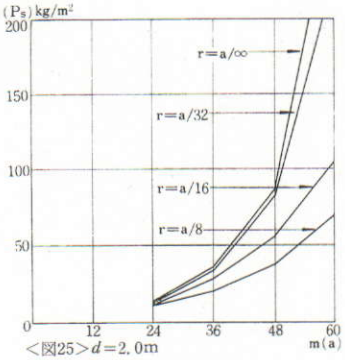
<図22>$d=0.5$m



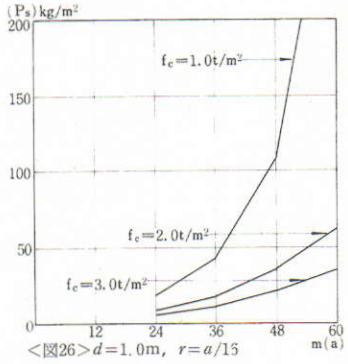
<図23>$d=1.0$m



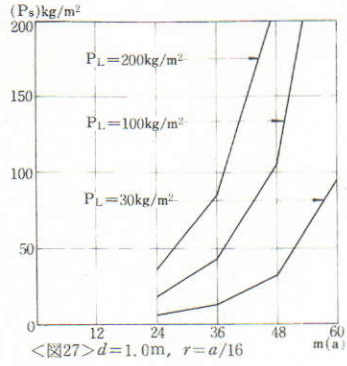
<図24>$d=1.5$m



<図25>$d=2.0$m



<図26>$d=1.0$m, $r=a/15$



<図27>$d=1.0$m, $r=a/16$

<表 4>$P_L=100$kg/m², $f_s=1.0$t/cm² の場合の P_s

スパン a (m)	曲率半径 r/a	デプス d (m)	構造体自重 P_s(kg/m²)
24.0	0	0.5	72
36.0	1/32	1.0	69
48.0	1/16	1.5	69
60.0	1/8	2.0	68

<表 5>$f_s=1.($(t/cm²) の場合の P_s に対する比

許容応力度 f_s (t/cm²)	スパン a (m) 24.0	36.0	48.0	60.0
1.0	1/1	1/1	1/1	1/1
2.0	1/2.18	1/2.43	1/3.06	1/5.16
3.0	1/3.36	1/3.85	1/5.12	1/9.33

とり曲率半径ごとに，$P_L=100$kg/m²，$f_s=1.0$t/cm² のときの P_s をプロットしたものを示す。図より，スパン一定の場合，デプスを増してゆくと，曲率半径によらず，P_s は一定の値に収斂すること，またデプスが小さいほど曲率半径の影響が大きいことが判る。

同様に図21～27には，デプス別に横軸にスパン a をとり，曲率半径ごとに $P_L=100$kg/m²，$f_s=1.0$t/cm² のときの P_s をプロットしたものを示す。一般的な傾向として，スパンが大きくなると P_s は増え，スパンに限界があることが示されている。但し，曲率半径が $r/a=1/8$ で $d=0.2$m の場合，$a=36.0$m の方が $a=24.0$m より減り，$d=0.5$m の場合，ほぼ等しくなつている。これは，$a=36.0$m の方が膜構造物的な性状となつているためであり，膜構造的な性状を示す曲率半径は，スパンに比例していないことが判る。

構造体自重 P_s を変えずに，異るスパンの立体トラスを設計する一例として，$P_L=100$kg/m²，$f_s=1.0$t/cm² の場合を表4に示す。スパンを大きくするに従い，デプスを増すと共に，曲率半径を小さくしてゆくことによつて，ほぼ等しい構造体自重で設計できることが示されている。

部材強度を変えた場合を図26に示す。デプス $d=1.0$m，$r=a/16$ の曲率半径について，横軸にスパン a をとり，$f_s=1.0$, 2.0, 3.0t/cm² とした場合の P_s をプロットしたものである。スパンごとの f_s の違いによる P_s の比を表5に示す。スパンが大きくなるに従い，部材強度の増加率に比べ P_s の減少比率は大きくなつている。

部材強度 f_s の場合の構造体自重を P_{s1} としたとき，部材強度が m 倍になると，構造体自重 P_{sm} は，膜構造のとき，(28)式より，

$$P_{sm}=P_{s1}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{f_s-\alpha a}{f_s-\alpha a/m}\right) \quad (53)$$

曲げ構造のとき，(31)式より，

$$P_{sm}=P_{s1}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{f_s-\beta a^2/d}{f_s-\beta a^2/(dm)}\right) \quad (54)$$

即ち，m が1以上のとき（ ）内は1以下となり，αa，または $\beta a^2/d$ が大きいほど小さな値となり，表5の数値を裏付けている。

構造体自重 P_s を変えずに，部材強度のみ変えて，スパンを大きくすることを考えると，図26より $a=24.0m$ を $f_s=1.0$t/cm² に対して，$a=36.0$m を $f_s=2.0$t/cm²，$a=48.0$m を $f_s=3.0$t/cm² とすれば，P_s は夫々18 kg/m², 18kg/m², 21kg/m² となる。スパンを倍にするためには，部材強度を3倍以上にしなければならないわけである。部材強度は引張の場合には材料強度，圧縮の場合には材料強度と部材断面形，座屈長さによる。部材断面形は座屈を考慮すると，パイプが最も良く，その場合部材強度はほぼ径と長さに依存する。

構造体以外の重量 P_L(t/m²) を変えた場合を図27に示す。デプス $d=1.0$ m，$r=a/16$ の曲率半径について，横軸にスパン a をとり，$P_L=200$, 100, 30kg/m² とした場合の P_s をプロットしたものである。これは，(28)，(31)式でも示されているように，P_L に比例した P_s となつている。

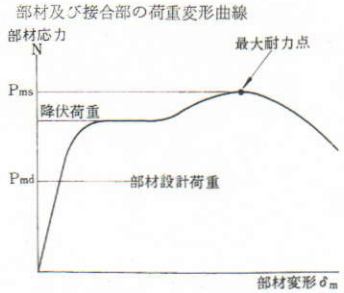
Ⅲ 立体トラスの耐力

1 荷重変形曲線

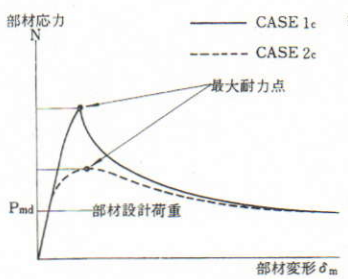
通常の立体トラスは不静定次数が極めて高く，設計荷重以上の過荷重を受けた場合の構造体としての破壊の様式は，立体トラスの形状，グリッドパターン，部材の材料及び作用荷重の種類によつてまちまちになるが，概念的には基本的な破壊形式を述べることができる。本節では，荷重変形曲線に基づいて，過荷重を受けた立体トラスの挙動について論じる。

立体トラスは，3次元座標上にある部材とそれを結びつける接合部から構成されている。部材は存在する応力によつて引張材と圧縮材に区別でき，ラーメン構造物のような曲げ部材はない。立体トラスの構造全体の形状に関係する全体座屈の問題を考えないとすると，立体トラスの破壊は，引張材，圧縮材，接合部の何れかの破壊に伴つて起る。

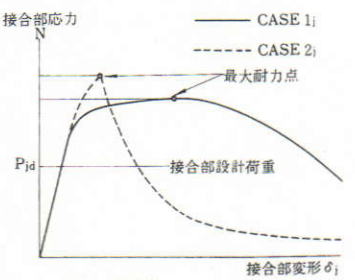
鋼構造物における1個の引張材の荷重変形曲線を図28に示す。引張材の挙動は鋼材料の応力－歪関係とほぼ同様な傾向をみせる。即ち弾性限までは荷重と変形は線型関係であり，降伏荷重到達後しばらくの間は変形のみ進み，歪硬化域を経て引張材としての最大耐力に達し，それ以降は耐力が低下し破断する。図29に圧縮材の荷重変形曲線



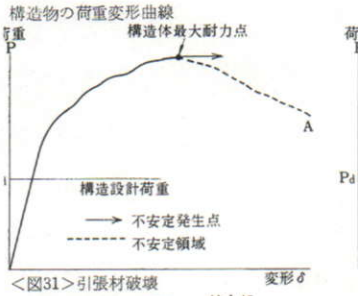
<図28>引張材



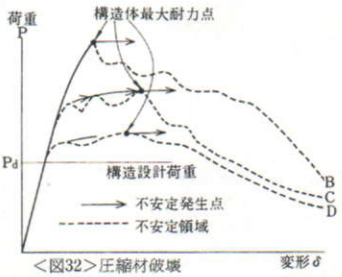
<図29>圧縮材



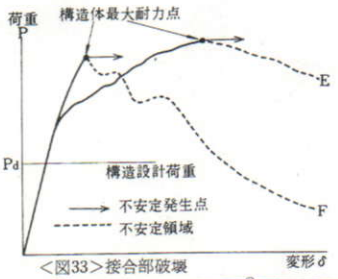
<図30>接合部



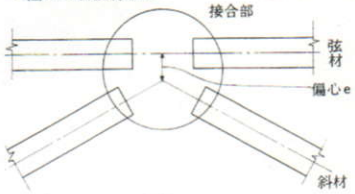
<図31>引張材破壊



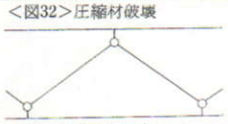
<図32>圧縮材破壊

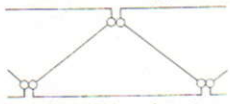


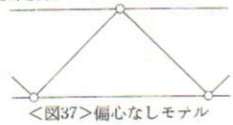
<図33>接合部破壊

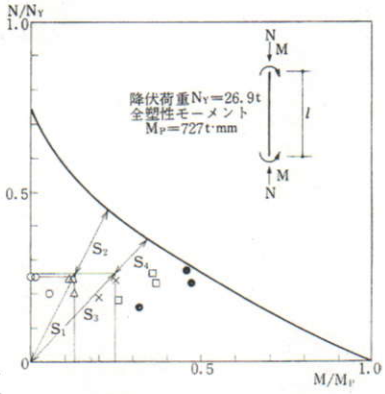


<図34>トラスの偏心


<図35>偏心モデル 1

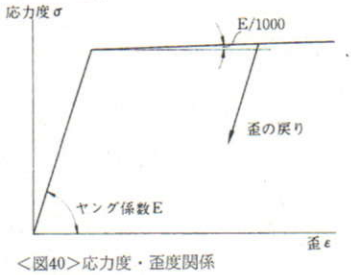

<図36>偏心モデル 2


<図37>偏心なしモデル



記　号	○	△	×	□	●
偏心率 e/i	0	1	2	3	4

パイプ ϕ89.1×4.2mm
断面2次半径：i=30.1mm
細長比：l/i=100
<図38>最大耐力インターラクション曲線と立体トラス計算結果



<図40>応力度・歪度関係

る示す。圧縮材の挙動は大きく二つに分けて考えることができる。CASE 1 c は偏心，初期撓み，残留応力等の初期不整がない圧縮材の場合であり，圧縮材としての最大耐力は高い代りに，最大耐力後は急激な耐力低下を示す。CASE 2 c は初期不整のある場合であり，作用荷重が低い段階から荷重と変形は線型関係でなくなり，最大耐力後も，比較的緩やかに耐力が低下する。CASE 1 c，CASE 2 c 共座屈現象が顕著に表われる細長比の大きな圧縮材の場合であるが，細長比が小さい場合は引張材的な挙動に順次近づく。

図30は接合部の荷重変形曲線である。接合部が降伏後の変形も考えて十分安全に設計されているならば，CASE 1 j のような挙動を示す。CASE 2 j は脆性的な挙動を示す接合部の場合である。図28～30の何れの場合についても，設計荷重以下の荷重の限りにおいては問題は生じない。

個材及び接合部の荷重変形曲線が上述したような挙動を示すとき，構造物全体の荷重変形曲線はどのようになるであろうか。もし引張材のみが順次降伏していつた場合は，一つの引張材が降伏したとしても，引張材の荷重変形曲線の性状により，過荷重は他の部材に再配分され，構造体の耐力は低下することなく図31で示すAのような構造体の荷重変形曲線となる。圧縮材のみが順次座屈した場合，CASE 1 c のような圧縮材の荷重変形曲線を有するときは，図32に示すBの如く，1本の圧縮材の座屈により，荷重が他の部材に再配分された状態で次の圧縮材の座屈を引き起し，また次の圧縮材が座屈するというような所謂連鎖破壊が生じる。Cの如く，数本の部材の座屈までは耐力が増加して，その後低下するという挙動もあり得る。CASE 2 c のような圧縮材の荷重変形曲線の場合は，もと

もと圧縮材としての最大耐力が不足しているので，急激な耐力低下をきたさないでDのようになる。接合部の破壊に伴う構造体の荷重変形曲線は図33である。CASE 1 j のような接合部に対してはEの如くに，CASE 2 j に対してはFのようになる。

実際の構造物の破壊は，引張材，圧縮材，接合部の破壊が入り混じつて起るが，大別すると一つの破壊が生じると，たとえ荷重の再配分が起つても，次々と破壊が進行する連鎖破壊の場合，即ち最初の個材か接合部が破壊する直前が構造体の最大耐力である場合と，幾つかの破壊が生じた後に最大耐力を発揮する場合がある。

2 偏　心

圧縮材が図29の CASE 2 c のような荷重変形曲線を描く原因として，初期不整が考えられる。主な初期不整の一つとして偏心がある。偏心を有する圧縮材で構成されている構造体の最大耐力は低下する<図32>。偏心しているために生じる曲げ応力が部材の降伏を早め耐力を低下させるからである。本節では，接合部に設計上避けられない偏心がある場合について，この偏心が立体トラスの安全性にいかなる影響を与えるかを述べ，更に偏心を有する圧縮材の弾塑性挙動を考察する。図34の如く接合部に偏心があるとき，これを図35のようにモデル化する。普通，立体トラスは図37のようにモデル化して，軸力のみ考慮したトラス解析によつて計算すればよいが，偏心のある場合は曲げモーメントが問題になるので，図35のように弦材を軸力と曲げモーメント両方を考慮した部材でモデル化し，ラーメン解析で計算する必要がある。但し接合部の種類によつては，弦材が連続している図35のモデルはあてはまらなく，図36のモデルがあてはまる場合もある。このモデルが適用される場合，偏心の影響はよりきびしく表われる。

軸力と曲げモーメントを受ける圧縮材は，細長比によつて決る最大耐力インターラクション曲線をもつ。この曲線をもとに，偏心を有する立体トラスの安全性を例題を用いて考えてみる。

STK41 パイプ ϕ89.1×4.2mm，細長比100におけるインターラクション曲線は図38に示したものである。この図に，同様のパイプ部材を用いた偏心を有する立体トラスの図35のモデル化による軸力と曲げモーメントを夫々降伏荷重，全塑性モーメントで無次元化してプロットする。偏心がない場合と，ある場合4種類を想定し，偏心率（偏心を断面2次半径で除した量）を 0，1，2，3，4 としている。偏心率 $e/i=1$ の場合，最もきびしい材でも，図38に示したように，最大耐力に達するまでにはまだ S_2 だけ余裕があり，図より，構造安全率は $(S_1+S_2)/S_1 \fallingdotseq 2$ となる。これが偏心率 $e/i=2$ になると，構造安全率は $(S_3+S_4)/S_3 \fallingdotseq 1.5$ になり，安全性が低下する。

偏心を有する圧縮材の弾塑性挙動を考察する。

立体トラスを図35のようにモデル化すると，ある対象とする圧縮材の回りの部材が，圧縮材の端部を曲げバネとして拘束するはずである。拘束している部材の他端はピンであるとすると，この材による曲げバネ定数は $3EI/l$（EI：曲げ剛性，l：材長）である。即ち，k 本の曲げ拘束材による曲げバネ定数は $3kEI/l$ となる。以上のことより，立体トラスの圧縮材を取出すと図39のようにモデル化できる。このモデルにおいて，回りの部材が座屈していくと，徐々に曲げバネによる拘束がなくなり，最後には $k=0$ の両端ピン支持の圧縮材になる。図36のようなモデルでは，最初から $k=0$ の場合の座屈となる。

図39のモデルで，ポテンシャルエネルギー増分の停留原理に基づいた，大変形を考慮した弾塑性解析をする。解析を行うに際して，次の仮定を設ける。

(1)部材は総て線材として扱う。

(2)断面は変形後も平面を保持する。

(3)材料の応力度―歪度関係は図40に示すものを用いる（σ：応力度，ε：歪度，E：ヤング係数）。

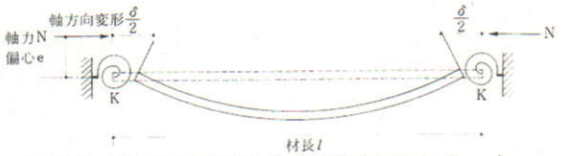
(4)断面内の応力度，歪度に関しては，断面を細かく層状に分割しその単位分割中では一定とする。

解析法の基本的考え方は以下の通りである。

平面保持の仮定から部材内の軸方向歪度増分 $\Delta\varepsilon$ は，軸方向変位を Δu，軸直角方向変位を Δv，重心軸からの距離を z として，

$$\Delta\varepsilon=\frac{d\Delta u}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2-\frac{d^2\Delta v}{dx^2}\cdot z \quad (5)$$

となる。変位増分によつて，部材に貯えられる歪エネルギー増分 ΔU は，断



曲げ剛性：EI　曲げバネ定数：$K=3kEI/l(k=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$
<図39>偏心を有する圧縮材

面内の応力度を $\sigma(x, y, z)$，断面内の降伏状況に応じて，その点のヤング率を $E(x, y, z)$ として，

$$\Delta U=\int_v \sigma(x, y, z)\Delta\varepsilon dxdydz + \frac{1}{2}\int_v E(x, y, z)(\Delta\varepsilon)^2 dxdydz$$

となる。外力のなす仕事の増分を ΔW とすると，ポテンシャルエネルギー増分 $\Delta\pi$ は，

$$\Delta\pi=\Delta U-\Delta W \quad (56)$$

となる。

釣合状態において，ポテンシャルエネルギー増分は停留しているから，変分原理を用いて変位増分が求められる。

この計算をステップバイステップに繰返すことによつて解析が進められる。

この解析法による，STK41 パイプ ϕ89.1×4.2mm，細長比 100 における偏心率 e/i と，曲げバネ定数の係数 k を変化させた 9 種類の場合の数値計算結果を図41に示す。総ての場合において，初期撓みを半波形正弦波，中央の値 $l/1000$（l：材長）で与えておく。曲げバネ定数の係数 $k=2$ 即ち端部が 2 本の部材で曲げ拘束されている場合に着目すると（CASE 7, 8, 9），偏心がない場合，25.9 t であつた座屈荷重（最大耐力）が，偏心率 $e/i=2$ のとき，16.8 t（65%）になり，$e/i=4$のとき14 t（54%）になる。$k=0$, $e/i=0$ のCASE 1，即ち両端ピン支持，偏心のない圧縮材の最大耐力と建築学会の決める短期の許容応力との比較をすると，$l/1000$程度の初期撓みがある場合，辛うじて最大耐力付近が短期許容応力を越えているに過ぎない。CASE 2，3 の場合のように若干の偏心があると，もはや短期許容応力のみでなく長期許容応力の値も達成できない。然し端部に曲げバネを考えると，$k=2$, $e/i=2$ のCASE 8 の場合でも，初期剛性は小さくなるが，最大耐力は短期許容応力を満足している。

実際の構造物においては，$k=0$, $e/i=0$ ということはなく，k も e/i もある値で存在しているので，ある適度な耐力が保たれていると考えられる。設計における理想状態の仮定と現実的な状態が偏心量と端部曲げバネの存在という意味でバランスしているのであろう。

3 構造信頼性

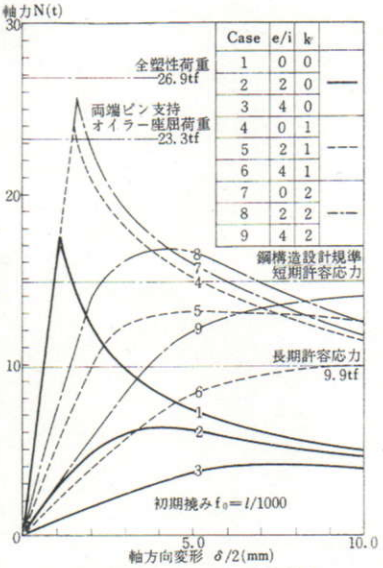
構造物の何れか一部分の部材が破壊すると，構造物全体が破壊するという連鎖破壊が生じ易い構造物がある。立体トラスにおいては，Ⅲ—1 節で述べたように，連鎖破壊は圧縮材の座屈或は接合部の脆性的な破壊が生じた場合に起り得る。たとえ連鎖破壊が生じる構造物であつても，最初に破壊する個所が設計通りに十分な耐力を発揮すれば，構造物としての耐力は高くなるので，降伏後の変形能力等の構造物の靱性を問題にする必要がない限りでは，設計の一つの方法である。然しながら，耐力を期待した部材や接合部に，加工，組立，施工，腐蝕等に起因する耐力を低下させる要因が含まれていて，それにより構造全体の耐力が著しく低下する構造物は，信頼性があるとはいえない。

構造物の信頼性は確率論を用いて論じられることが多い。たまたま生じる部材や接合部の耐力低下を確率論で性格づけ，荷重の発生頻度に関する確率関数との関係をもとにして，構造全体の破壊確率を算定する方法である。構造物に作用する荷重を L，構造物の耐力を R とすると，L 並びに R は夫々ある確率分布に従う確率変数であると考えられる。この場合，構造物の破壊が生ずるのは事象（$L>R$）が生ずるときであり，その確率は $P(L>R)$ である。この事象の生起する確率を，破壊確率 Pf とする。Pf は次式で表わされる。

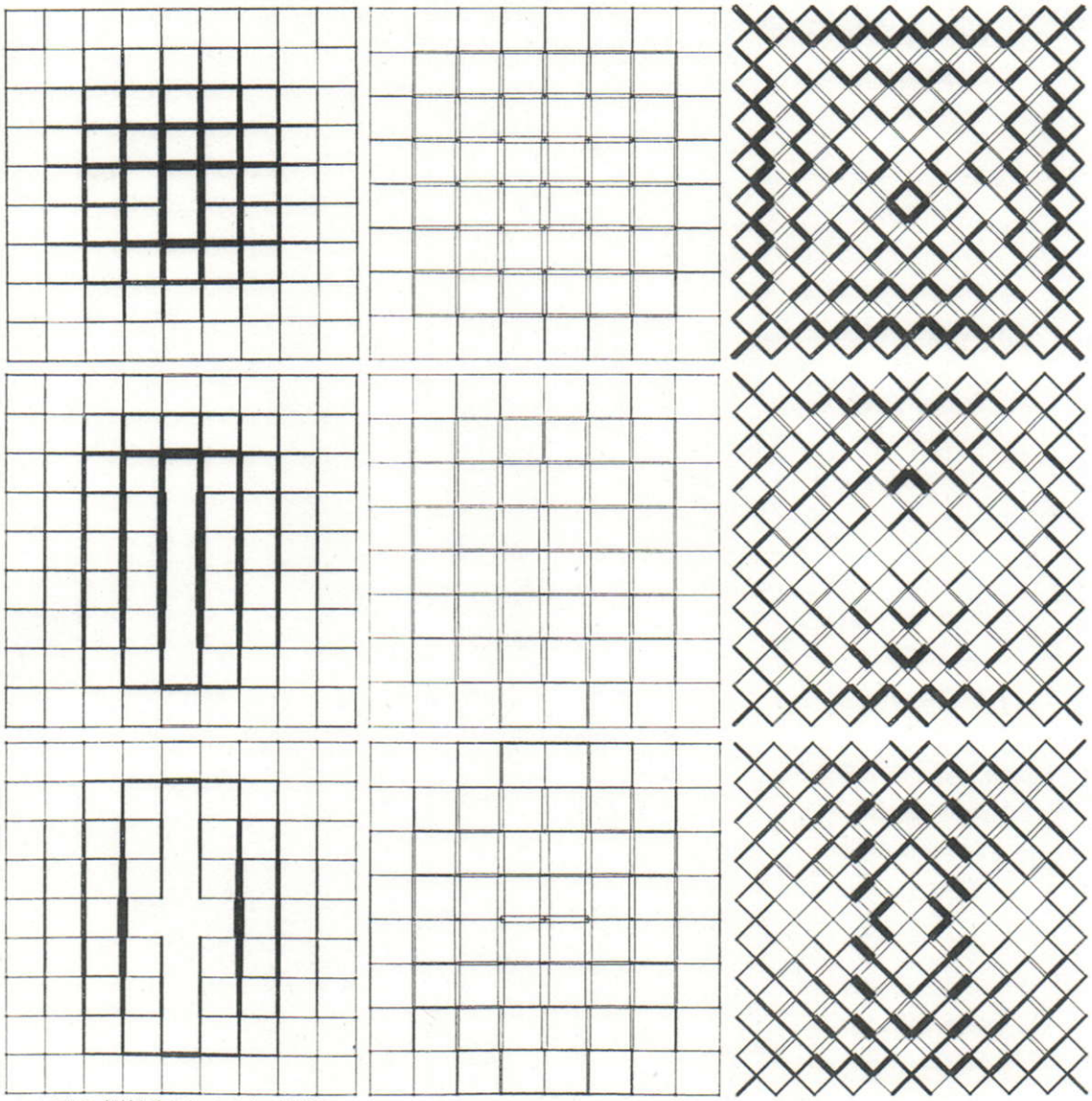
$$Pf=P(L>R)=P(R/L<1) =P(L-R>0) \quad (57)$$

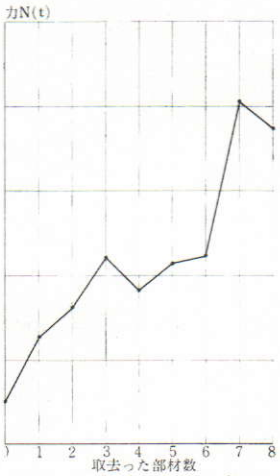
然し構造物の耐力及び荷重の確率関数のモデルは現実には，適切に選ぶことが非常に難しい。部材の耐力に限つて力学的問題に関する確率論的評価はある程度できるとしても，組立時や施工時の種々のトラブル，例えばボルトの締忘れ等は，確率モデルの設定が非常に難しいであろう。

構造物の信頼性に関して，限られてはいるが一つの評価を与える手法として，ある荷重状態で軸力の大きい部材から順次，何本か取去つたときに，軸

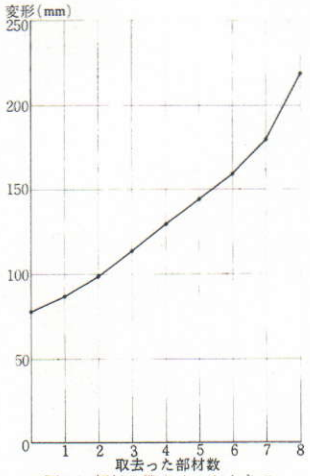


<図41>圧縮材荷重変形曲線計算結果

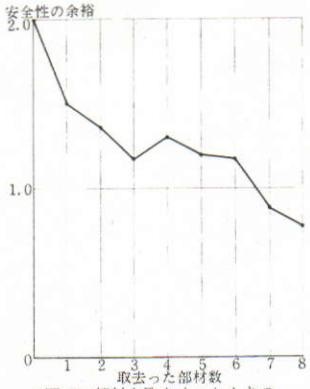

<図42>部材を取り去つたときの軸力図



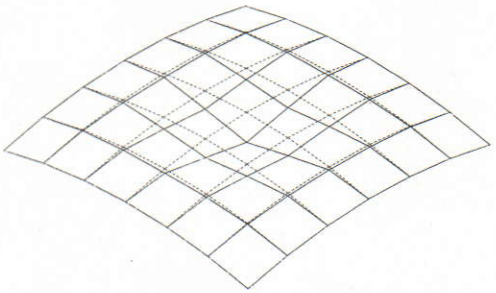
<図43>部材を取り去つたときの最大圧縮力

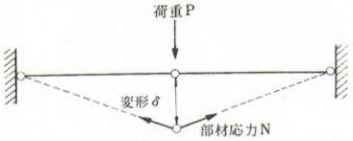


<図44>部材を取り去つたときの立体トラスの変形



<図45>部材を取り去つたときの構造安全率


<図48>全体座屈1次モード



<図46>幾何剛性

力分布がどのように変り，最大軸力が如何に変化するか調べる方法が考えられる。部材を取去ることによつて，構造物の構造安全率がどのように変るかとか，連鎖破壊の可能性を探ることができるのである。もし，最大応力が生じている部材を取去ることによつて他の部材に生じる最大応力が，連鎖的に他の部材或は接合部の破壊を引起すのに十分であれば，その状態で構造物は破壊する。

上記のことを，スパン24×24m，グリッド3×3m，デプス1mのフラットな立体トラスを例にして論じてみる。上弦面に鉛直荷重がかかつている状態で，上弦材の圧縮力が大きい順に，部材を8本まで取去つたときの計算をする。部材を取去るということは，座屈が生じて耐力が0になつている場合とか，部材の取付けミスが起つた場合などが想定される。図42に部材を幾つか取去つた状態における軸力分布の推移を示す。部材を取去ると，その回りの数本の部材が力をもちよつて，荷重に抵抗している様子が判る。図43に各々の場合における最大圧縮力の推移を，図44に立体トラス中央点の鉛直方向変形を示す。いま部材の耐力が50tであつたとすると，図43の結果から部材を6本取去つても軸力が50tを越さないので，たとえ最初の6本の部材が設計の際考えられた十分な耐力を発揮しなくとも，7本目の部材が十分強ければ，構造物は安全であることが判る。この場合，立体トラスの構造信頼性は極めて高いといえる。然し部材の耐力が30tであるとすると，最初の部材が耐力を発揮しないと，構造物は連鎖破壊をしてしまう。それ故危険な信頼性の低い構造物である。図45は部材の耐力が50tとして，上弦材最大軸力でこれを除した値である。部材を取去らないもともとの立体トラスにおける最大軸力は25tであり，この部材が設計通りの耐力を発揮してくれれば構造安全率は2.0である。部材を取去ると，この構造安全率は低下する。即ち部材を6本取去つても安全性の余裕があり，構造物は破壊しないが，部材が少く取去られているときに比べて，危険な状態にあることを示している。

何れにせよ，立体トラスは通常，不静定次数が極めて高いので，部材にある程度の耐力を保持させておけば，部材を数本取去つたからといつて，すぐに不安定になることは少い。

4 全体座屈

立体トラスの破壊は，引張材，圧縮材，接合部の何れかの破壊に伴つて起る場合の他に，立体トラスの構造全体の形状に関係する全体座屈による場合がある。全体座屈の問題は，立体トラスが複層である限り，設計に際して撓みの検討ができていれば，通常考える必要がなく，全体座屈荷重を計算してみても，設計荷重の数十倍の大きさになることが多い。然し立体トラスが単層である場合は，ときとして設計荷重の2，3倍の荷重で全体座屈が生じることもあり得るので注意を要する。

全体座屈解析の基礎理論は，普通，仮想仕事式に基づく剛性法によつて行われる。立体トラスの線形剛性を$[K]$，幾何剛性を$[K_G]$とすれば，全体座屈荷重は，次式の固有値γ（座屈荷重係数）を求めることによつて得られる。

$$\det\{[K]+\gamma[K_G]\}=0 \qquad (59)$$

幾何剛性$[K_G]$とは，構造体がある荷重を受けたとき，変形することにより生じる部材応力の向きの変化によつて，構造体に付加される剛性である。例えば，「図46の実線で示したような3点ピンの構造体は不安定構造物であるが，荷重Pによりδ変形すると，部材応力Nが生じて，荷重と釣合う」というような問題を扱うときに考えなくてはならない剛性マトリックスである。

図47のようなスパン18×18m，曲率半径37mの単層球面立体トラスの全体座屈荷重を求めてみる。計算結果によると全体座屈は長期設計荷重の2倍で生じる。図48にその座屈モードを示す。

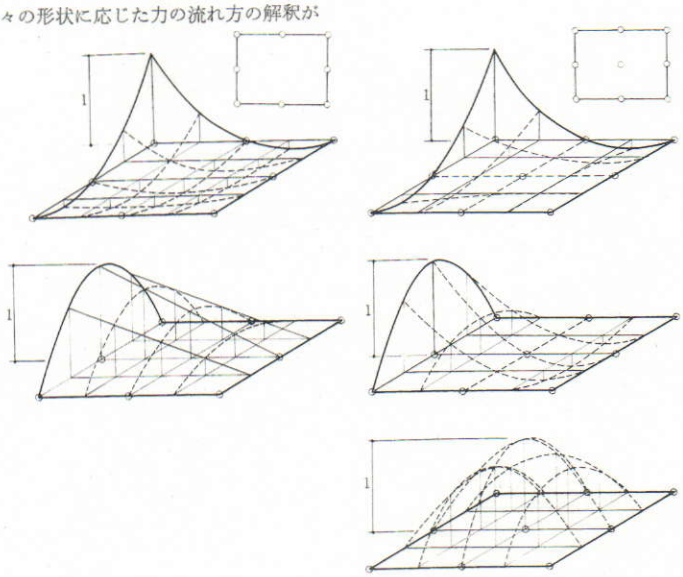
<図47>単層球面立体トラス

IV 自由曲面を構成する立体トラス

1 自由曲面の作成

立体トラスは，その1本1本の部材は直線であるにも拘らず，全体の形状は各種の曲面形を表わすことができる。曲面の形状はシェル力学の体系で分類されており，それはドーム，球形シェル等の正のガウス曲率をもつ曲面，筒形シェル，錐形シェル等のゼロのガウス曲率をもつ曲面，HPシェル，鞍形曲面シェル，吊屋根等の負のガウス曲率をもつ曲面，折板，波板等の正負のガウス曲率をもつ曲面の4種に分類される。これらのシェルについては，各々の形状に応じた力の流れ方の解釈が必要である。立体トラスにおいても，シェルにおいて用いられる形状は総て扱うことができ，力学的な考え方にも共通したものがある。更に最近の発達したコンピューターによれば，立体トラスの応力や変形を求める解析は，マトリックス変位法を用いて簡単にできるようになつている。これらのシェルの力学とコンピューターを用いた応力解析を用いれば，自由な曲面を構成する立体トラス構造の設計には解析上，大きな障害はないといえる。

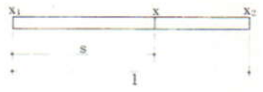
一方，立体トラスの形状の決め方には，マトリックス変位法と同種の考え



<図49>有限要素法における形状関数の例

方である有限要素法の基本的な考え方が応用できる。

有限要素法の基本的な考え方は，対象としている連続体を有限な大きさをもつ要素に分割し，その一つ一つの要素内部の変形性状をある簡単な関数によつて表わしその中で応力－歪の関係を満たさせ，その要素を総て集めて解く際に力の釣合いと変形の適合条件を満たすようにして解析する方法である。ここで立体トラスの形状を決めるために用いるのは，有限要素法における一つの要素内部の変形性状を表わすために用いられる変位関数の考え方である<図49>。原理としては，よく1本の棒の問題を解くときに用いる方法：



<図50>

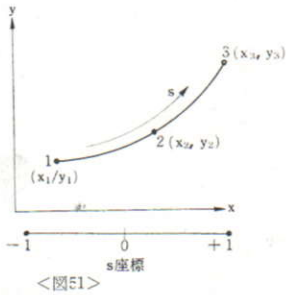
棒の両端の座標が x_1，x_2 のとき，棒の長さ1に対して左端から s の位置の x 座標は，

$$x=(1-s)\cdot x_1+s\cdot x_2 \qquad (59)$$

と表わせる。

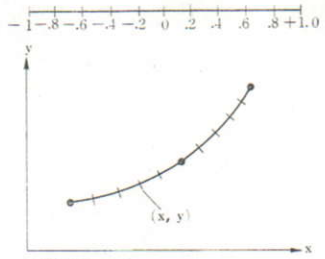
を一般化したものである。

立体空間の中に定義された一つの曲面を表わすことが目的であるが，議論を簡単にするために2次元空間において，そこに定義された曲線を表わす方法について述べる。



<図51>

図51に示した曲線は1，2，3の点において（X_1，Y_1），（X_2，Y_2），（X_3，Y_3）を通るということのみが定義されているとする。ここに，曲線1－3に添つた座標 s を考える。s の値は1の点において -1，2点で0，3点で1であるように対応させる。この場合 α_1～α_6 を未定係数として，曲線上の任意の点の座標（X，Y）は次式によつて



<図52>

表わせる。

$$\begin{cases} x=\alpha_1+\alpha_2 s+\alpha_3 s^2 \\ y=\alpha_4+\alpha_5 s+\alpha_6 s^2 \end{cases} \qquad (60)$$

(60)式が s に関する2次の多項式になるのは1，2，3点を通るような曲線にするために必要なのであつて，これ以上高次の関数を用いるためには，更に4，5，……等の点の座標値が決められていなければならない。

(60)式によつて表わされた曲線が1，2，3の各点を通るという条件により α_1～α_6 の未知数は(61)式を解くことによつて求めることができる。

$$\begin{cases} x_1=\alpha_1+\alpha_2\cdot(-1)+\alpha_3\cdot(-1)^2 \\ x_2=\alpha_1+\alpha_2\cdot(0)+\alpha_3\cdot(0)^2 \\ x_3=\alpha_1+\alpha_2\cdot(+1)+\alpha_3\cdot(+1)^2 \\ y_1=\alpha_4+\alpha_5\cdot(-1)+\alpha_6\cdot(-1)^2 \\ y_2=\alpha_4+\alpha_5\cdot(0)+\alpha_6\cdot(0)^2 \\ y_3=\alpha_4+\alpha_5\cdot(+1)+\alpha_6\cdot(+1)^2 \end{cases} \qquad (61)$$

このようにして α_1～α_6 が既知の値となれば先に示した(60)式は

$$\begin{cases} x=\alpha_1+\alpha_2\cdot s+\alpha_3\cdot s^2 \\ y=\alpha_4+\alpha_5\cdot s+\alpha_6\cdot s^2 \end{cases} \qquad (62)$$

（ここに α_1～α_6 は既知量）

となる。

この(62)式を用いることによつて，例えば $s=-1$～$+1$ の間を10等分した場合に相当する曲線上の（X，Y）座標の値が計算できるわけである<図52>。

立体空間において定義された曲面を表わす方法は一言でいえば，以上の展開において用いていた s 座標を $s-t$ 座標，$X-Y$ 座標を $X-Y-Z$ 座標に置きかえて考えればよい。

つまり，$s-t$ 座標で表わされた無次元平面と，$X-Y-Z$ 座標系において定義された曲面とを1対1で対応させるのである<図53>。

立体トラスのグリッド分割は $s-t$ 座標系で「碁盤の目」状に行い，それに対応した $X-Y-Z$ 上の曲面の座標を計算すれば，それが立体トラスの曲面を表わすことになる。

以上の操作を上弦面，下弦面について行い，上弦材，下弦材，斜材を夫々必要な節点間に結び付ければ立体トラスの形状が決定される。

この考え方による立体トラスの形状は，デザイナーの考えた曲面の中で，重要と思われる数点の座標値と，曲面を表わすために用いる関数（s，t の関数）の次数によつて決められる。s，t に関して高次の関数を用い，デザイナーによつて決められた点の数が多いほど複雑な曲面を表わすことができる。更に X や Y の値も s，t の関数としているため，必ずしもトラスの平面的な形状も長方形や正方形である必要はなく，曲線で囲まれた形でもかまわない。

2　自由曲面を構成する立体トラスの例

一つの適用例として $X-Y-Z$ 空間において上弦面，下弦面共に9個の点で定義づけられる曲面により構成される立体トラスについて，そのモデル図と応力分布図を図54に示す。9個の点で定義される曲面の X，Y，Z 座標値は総て無次元座標系 $s-t$ についての 1，s，t，s^2，st，t^2，s^2t，st^2，s^2t^2 の9項に関する多項式で表わすことができる。

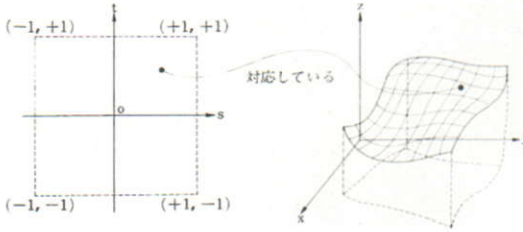
V　新しい立体トラスシステムの開発

1　ジョイントフレキシビリティ

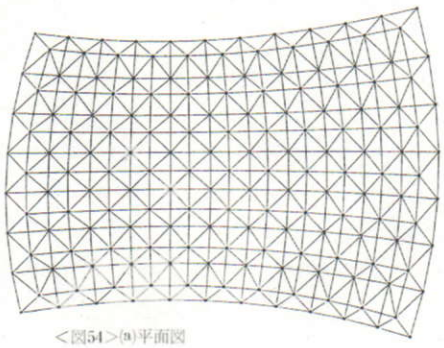
II章で述べたような立体トラスの基本的な力の流れを理解し，III章で述べたような立体トラスの耐力の低下の問題を解決し，且つデザイナーの要望するIV章で述べたような幾何学的条件にも柔軟，容易に対応できるように工夫されたジョイントシステムが開発されると，従来とかく敬遠されていた立体トラスシステムが手軽に設計に取入れられる。

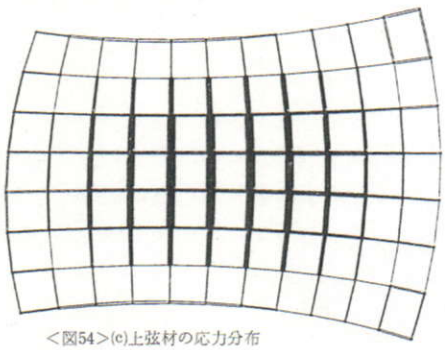
デザイナーが設計した立体トラスの如何なる形状，グリッドパターンにも容易に適応するには，ジョイントシステムにフレキシビリティがなければならない。ジョイントフレキシビリティとは次のようなことである。

(1)部材の取付き角度がジョイントごとに変えられる。

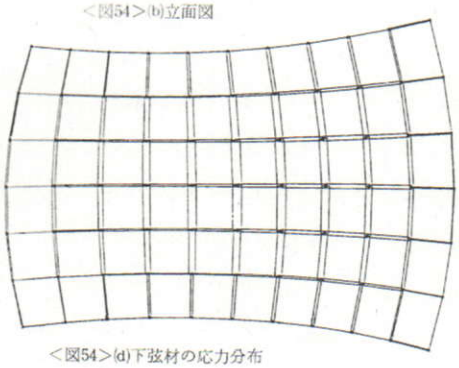


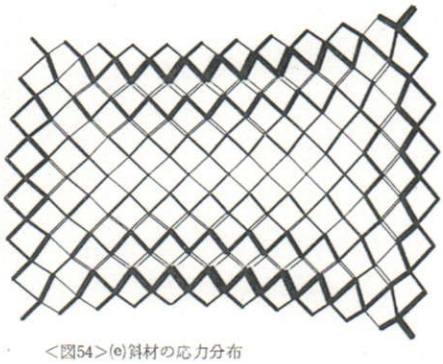
<図53>

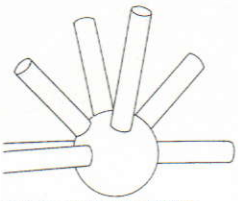

<図54>(a)平面図


<図54>(c)上弦材の応力分布

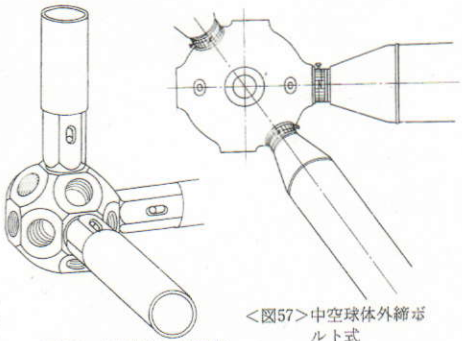
<図54>(b)立面図


<図54>(d)下弦材の応力分布


<図54>(e)斜材の応力分布

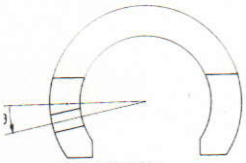


<図55>中空球体外溶接式

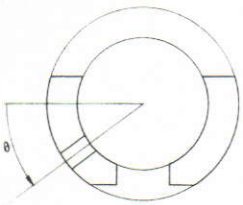


<図56>中空球体ネジ穴式

<図57>中空球体外締ボルト式

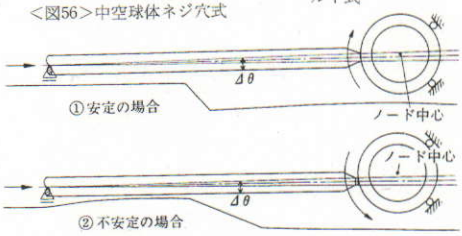


取付き角度浅い

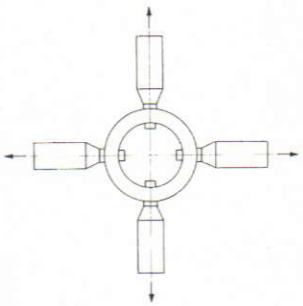


取付き角度深い

<図58>部材取付き角度



<図60>圧縮力を受けるジョイント部



<図59>引張力を受けるジョイント部

(2)一つの部材が独立に取付く。

(3)一つの部材の取付き角度が立体的に大である。

(4)角度変化できる部材数が大である。

(5)一つのジョイントにおける部材集合数が多い。

ジョイント本体を球で構成すると，球には3次元座標上で方向性がないので，この問題に対処し易い。

従来の典型的な球ジョイントとして，

(a)中空球体外溶接式<図55>

(b)中実球体ネジ孔式<図56>

(c)中空球体外締ボルト式<図57>

等があるが，上記したジョイントフレキシビリティの条件を満足するためには，(a)のジョイントは手間のかかる現場溶接を伴い，(b)及び(c)のジョイントは複雑なネジ切り加工を要する。

2 新しいジョイントシステム

新日本製鐵は最近，NS トラスと名付けられた新しい立体トラスのジョイントシステムを開発した。

写真1に示すように，NS トラスのジョイントシステムは，ジョイント部品とメンバー部品からなつている。ジョイント部品はノード，高力ボルト，球面ワッシャーからなり，メンバー部品はエンドコーンとパイプからなつている。エンドコーンはパイプに溶接されている。立体トラスは，メンバー部品を球面ワッシャーとノードを介してボルトで接合することにより，組立てられる<写真 2，3>。このジョイントシステムは，次の特色を有する。

(1)ノードのボルト孔はネジ切りなしの直孔である。

(2)ボルト孔は数値制御された工作機械により，任意の角度に容易に穿孔される。

(3)各部材の狙い点は互いに偏心しない。

(4)球面ワッシャーとノード及びノードとボルト類との接点は球面の一部である。それ故2次応力が生じにくい。

(5)ノード形状は部材の取付き角度に応じて，球面を保ちながら種々に変化する<図58>。

(6)節点が有限の大きさをもつため，図59，60に示すように引張力や圧縮力を受けるときの安定問題についても検討して，製作に当つては厳密な精度規準が設けられている。

これらのことにより，NS トラスは上記したジョイントフレキシビリティを十分に満足し，また偏心と2次応力のない力学的に優れた立体トラスを組立てることができる。

3 部品の製作法

NS トラスのジョイントシステムの部品製作法は次の通りである。

(1)ジョイント部品

(a)ノード：鋳造或は鍛造により製作され，旋盤で表面切削される。ボルト孔は直孔で，ネジ切りはされない<写真 4～6>。

(b)ボルト：鍛造した後，ネジ転造して，熱処理される<写真 7>。

(c)球面ワッシャー：鍛造或は機械加工により製作される。

(2)メンバー部品

(a)エンドコーン：鍛造，鋳造或は機械加工により製作され，ボルト孔はネジ切りされる。

(b)パイプ：電縫鋼管，シームレス鋼管などを用いる。

(3)エンドコーンとパイプの接合

パイプにエンドコーンが摩擦圧接，またはアーク溶接によつて接合される<写真 8>。

VI あとがき

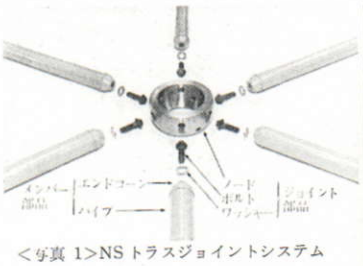
以上，構造物の規模の可能性を踏まえて，立体トラスの力の流れを考察し，また偏心，構造信頼性，座屈等に触れながら，立体トラスの耐力を論じた。更に自由曲面を構成する立体トラスについて述べ，新開発の NS トラスを紹介した。

なお，本考察をまとめるに当り，多大の協力を頂いた日建設計・東京，彦根茂氏に誌上を借りて感謝の意を表します。

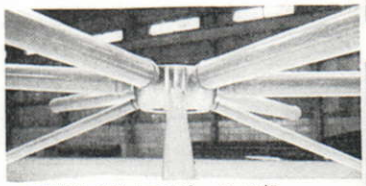
＜岩田：新日本製鐵標準建築事業部　和田：日建設計・東京＞

参考文献

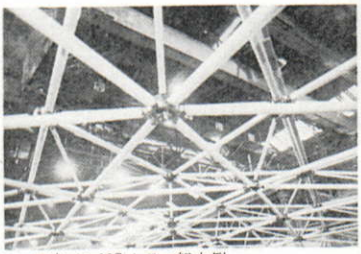
1)C. Zienkiewicz ; The Finite Element Method, Third Edition 1977.
2)土木学会編：構造物の安全性・信頼性，土木学会，1976年10月
3)L. C. Schmit, P. R. Morgan ; Space Trusses with Brittle-Type Shrut Buckling, ACCE, Vol. 102, No. ST 7, July, 1976
4)M. Fujimoto, M. Iwata, F. Nakatani, A. Wada ; Nonlinear Three Dimensional Analysis of Steel Frame Structure, 2nd International Coference on Space Structures, Surrey, England, August 1975.
5)Lambert Tall ; Structural Steel Design. Second Edition, The Ronald Press, 1974.
6)安藤正雄；オープンシステムとしてのスペースフレーム，カラム，No. 47，1973年4月
7)ガリレオ・ガリレイ（今野武雄，日田節次訳）；新科学対話上下，岩波文庫，1973年
8)坪井善勝；曲面構造，丸善株式会社，1965年3月



<写真 1>NS トラスジョイントシステム

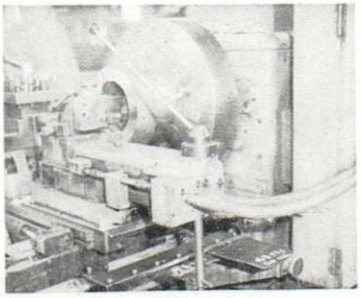


<写真 2>NS トラスジョイント部



<写真 3>NS トラス組立例

<写真 4>ノード鋳造



<写真 5>ノード表面切削

<写真 6>ノード穿孔

<写真 7>ボルト製造工程

<写真 8>パイプとエンドコーンの溶接