構造工学論文集 Vol. 32B（1986年3月）

衝撃荷重時における建築構造物の動的解析手法の比較

Comparison for numerical methods about dynamic response analysis of buildings under impact loadings.

市橋重勝 *　　和田 章 **
By Shigekatsu Ichihashi and Akira Wada

We stare the advance of numerical stress analysis program for building in wonder. Now, it is possible to get effective results of stress analysis from those program for behavior of nuclear plants by missile impact, and for local complex behavior of buildings under high-velocity loading. There are two methods for analytical scheme mainly. One is explict method and another is implicit method. We think that it is necessary to select analytical programs for these problems by considering wave propagation. In this report, we actually compared the diffirence from the mesh size of the model, and from the two analytical methods, by using simple canti-liver plate under impact loading. We use the material model as linear isotropic material for one case and as porfect plasticity with Von Mises criterion for another.

1. はじめに

電子計算機に関する技術の進歩は目著しく、特に、ハードウェア技術においては20年前に比べ、長足の進歩をしている。演算速度，高性能な主記憶装置，アレイ・プロセッサ等、今までは、計算時間がかかり過ぎ、計算することも不可能であった複雑な技術計算も可能となり、数値解析を行う技術者にとって、研究や設計を行う為に、ソフトウェア面を含めてよい環境を形成しつつある。この傾向は、今後、ますます、進歩していくと思われる。

このような環境の下で電子計算機を利用することは、構造物の静的な応力解析，動的な応力・応答解析を行うために、今後も有力な道具になる。昔から利用されている有限差分法にしても、今や、利用することが定着してきた有限要素法にしても、最近の境界要素法にしても、手法として確立されつつあり、電子計算機システムの進歩と共に、これ等の手法を有する構造物の応力・応答解析用の汎用プログラムも開発され、大いに利用されているのが現状である。

地震又は、強風等の外乱が建築構造物に作用した時の動的挙動を把握する方法として、一般的に利用されている手法は、解析対象構造物をバネーマス系にモデル化して波動伝播問題として考慮せずに、応力・応答解析を行う方法であり、現実にこの方法によりたくさんの高層建築物が建設されている。

然し乍ら、強震時の建築構造物には高速荷重が作用するとも考えられ、柱，はり，壁，床等により、構造形式

＊　工修　(株)構造計画研究所　社長室　　(〒164 東京都中野区本町4－38－13)
＊＊ 工博　東京工業大学助教授　工学部建築学科　(〒152 東京都目黒区大岡山2－12－1)

が複雑な仕口部等の部分に、構造上の破壊が生じる場合も考えられる。このような挙動を把握するには、解析する構造物のモデルとしても連続体としてミクロ・モデルとし波動伝播理論を導入し、応力・応答解析をする必要があると考えられる。一般に汎用構造解析プログラムを利用する技術者の中には、解析目的に対応するモデル化や、利用するプログラムの理論的な仮定, 解析手法, および誤差等も考慮することなく、入力データを作成すれば解析結果を得ることができると考えている技術者も少なくない。最近、少しづつ解析誤差の問題や連続体を有限差分法や有限要素法のようにモデル化する時の離散化による誤差等に対しての研究が進め始められているが、まだ、一般の利用者には、あまり考慮されていないのが現状である。また、精度についても、種々の研究者がパラメータ・スタディが行われつつある。一般に利用されている手法としては、陰解法と陽解法がある。ここで述べる陰解法とは構造系全体のその時刻の微分方程式を用いて、加速度, 速度及び変位を求める方法に対し、陽解法とは、前時刻までの計算された値を用いて現時刻の値を計算する手法である。計算する上での安定さは、陰解法の方が制約が少ないとされ、陽解法については、時間刻みに制約がある。そのため、陽解法は、演算回数が増加する。しかし、陰解法の場合は、各時間ステップ毎に構造物の全剛性行列を作り、それを変形する必要がある。また、安定性に対しての考慮も必要である。それ故、問題毎に選択を必要とする。ここにおいては、極端な例になるが、単純な構造物について構造物のモデル化による影響及び、一般的に利用されている有限要素法を用いた陰解法による応力・応答解析と、陽解法による時間積分法を用いた、有限差分法による応力・応答解析に対し、解析誤差は考慮せず、簡単な二次元平面問題を例題とし、衝撃的な荷重を作用させた時の両手法について具体的なモデルでの解析結果の比較を行うことを目的とした。ただし、ここで述べる有限要素法が全て陰解法ではなく、また、有限差分法が陽解法ではないが、代表的な陰解法の例として、一般的に用いられているNewmark法を用い、陽解法としては、中央差分法を用いた。ただし、構造物の材料特性については、線形の場合と完全弾塑性の場合について解析した。完全弾塑性の場合の破壊基準は、Von Misesの方法を用いた。

2. 有限要素法について（陰解法の例）

有限要素法に基づいた陰解法による動的解析法は、現在,構造物の動的挙動を知る上で一般的に利用されている手法である。ここでは、有限要素法の振動方程式及び、陰解法を用いたNewmark法について簡単に述べる。線形解析において、時刻t＋Δtにおける釣合方程式は次の通りである。

$$M\cdot\ddot{U}(t+\Delta t)+C\cdot\dot{U}(t+\Delta t)+K\cdot U(t+\Delta t)=R(t+\Delta t) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで、

M；質量行列　　C；減衰行列　　K；剛性行列

R（t＋Δt）；時刻t＋Δtに作用する外部荷重ベクトル

$\ddot{U}$（t＋Δt）；時刻t＋Δtにおける節点加速度ベクトル

$\dot{U}$（t＋Δt）；時刻t＋Δtにおける節点速度ベクトル

U（t＋Δt）；時刻t＋Δtにおける節点変位ベクトル

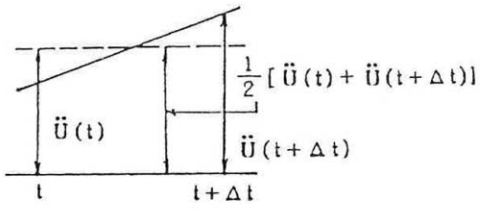


Fig 1 平均加速度法

ここでNewmark法に於ては、

$$U(t+\Delta t)=U(t)+\dot{U}(t)\,\Delta t+[(\tfrac{1}{2}-\alpha)\,\ddot{U}(t)+\alpha\ddot{U}(t+\Delta t)](\Delta t)^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\dot{U}(t+\Delta t)=\dot{U}(t)+[(1-\delta)\ddot{U}(t)+\delta\ddot{U}(t+\Delta t)]\cdot\Delta t \quad \cdots\cdots(3)$$

となる。ただし、$\delta=\frac{1}{4}$，　$\alpha=\frac{1}{2}$　をとると、Newmark法での“平均加速度法（Constant－Average－Acceleration法）”と呼ばれている。Fig 1 参照。

そこで、最初に各要素毎の剛性マトリックスK, 質量マトリックスM, 減衰マトリックスC を作成する。次に、U（0）, $\dot{U}$（0）, $\ddot{U}$（0）を初期化する。入力データとして、時間刻みΔt, パラメータ, α, δを定める。

今回の場合は、平均加速度法を用いているので、

$\delta = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ としている。これより

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1,$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right), \quad a_6 = \Delta t(1-\delta), \quad a_7 = \delta \Delta t \quad \cdots\cdots (4)$$

として、有効剛性マトリックスをKとして

$$\tilde{K} = K + a_0 M + a_1 C \quad \cdots\cdots (5)$$

で求め、これを

$$\tilde{K} = L \cdot D \cdot L^T \quad \cdots\cdots (6)$$

の形で三角化する。次に、各々の時間刻み毎に、右辺の計算を行う。 T は転置マトリックスを示す。

$$\tilde{R}(t+\Delta t) = R(t+\Delta t) + M(a_0 U(t) + a_2 \dot{U}(t) + a_3 \ddot{U}(t))$$
$$+ C(a_1 U(t) + a_4 \dot{U}(t) + a_5 \ddot{U}(t)) \quad \cdots\cdots (7)$$

時刻t+ Δtの変位を求める。

$$L \cdot D \cdot L^T \cdot U(t+\Delta t) = \tilde{R}(t+\Delta t) \quad \cdots\cdots (8)$$

(8) より、時刻t+ Δtの速度、加速度を求め、これを繰り返す。ここで、速度、加速度は以下の式にて求める。

$$\ddot{U}(t+\Delta t) = a_0(U(t+\Delta t) - U(t)) - a_2 \dot{U}(t) - a_3 \ddot{U}(t) \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\dot{U}(t+\Delta t) = \dot{U}(t) + a_6 \ddot{U}(t) + a_7 \ddot{U}(t+\Delta t) \quad \cdots\cdots (10)$$

今回の解析において、質量マトリックスMは、集中質量マトリックスとし、粘性はないものとしている。即ち、陰解法において (1) 式の如く、t+ Δt時刻での各点の変位を求める為に、構造物の全体剛性マトリックスを算定し、(8) 式により変位を求め、(2), (3) 式より速度, 加速度を求める方法である。

3. 有限差分法について（陽解法の例）

この解析手法は、電子計算機の発達する以前から利用されて来た手法で、電算機が進歩した現在に於ても、連続体の物理現象を解析する手法として利用されている。特に、ここでは連続体の衝撃解析に対応していると言われる陽解法の手法について示す。連続体の物理現象を記述する保存則表示の基礎方程式をLagrangeの座標系で表現し、境界条件、初期条件及び各種の補足関係式を与え、陽解法により、有限差分法で解析する。ただし、空間については表面積分法を用い、時間については現時刻の値を求める為に1時刻前の値を用いる前進形式として解析する。

基礎方程式の表示方法としては、以下の如く3つの保存則をLagrangeの座標系で表現する。

(1) 質量保存則

$$\frac{D}{Dt}\rho = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \quad \cdots\cdots (11)$$

(2) 運動量保存則

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = \frac{\partial}{\partial x_j} s_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} p\delta_{ij} + \rho g_i \quad \cdots\cdots (12)$$

(3) エネルギー保存則

$$\rho \frac{D}{Dt} u = -\frac{\partial}{\partial x_i} \dot{h}_i''' + s_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i - p \frac{\partial}{\partial x_i} v_i + S''' \quad \cdots\cdots (13)$$

ここで、

ρ ; 密度, v ; 速度, s ; 偏差応力, p ; 圧力, δ ; クロネッカー・デルタ,

g ; 重力加速度, u ; 単位体積当り内部エネルギー, $\dot{h}'''$; 伝導エネルギー流束,

S''' ; 単位体積当りエネルギー源

また、補足関係式としては、連続体を構成している材料の力学的特性を記述したものであり、状態方程式（圧力,比熱,体積歪係数等)、応力歪関係式（せん断力モデル、降伏応力モデル等)、及び熱流束関係式（伝導、輻射等）の考慮がなされる。境界条件は、連続体の幾何学的な条件及び、力学的な条件の双方より指定でき、初期条件については時間に関係する変数に対し、運動の開始時における系の状態として与える。 数値解析としては、1次元の場合について説明すると、Fig 2に示す如く、格子点からなる変位のメッシュ、及びゾーンからなる応力メッシュの2つの系統のラグランジェ・メッシュより構成される。変位, 速度, 加速度のベクトル量は、変位メッシュに関して適用される運動量保存則より求められ、内部エネルギー, 圧力, 応力等のスカラー量及びテンソル量は、応力メッシュに関して適用されるエネルギー保存則及び、補足関係式より計算される。

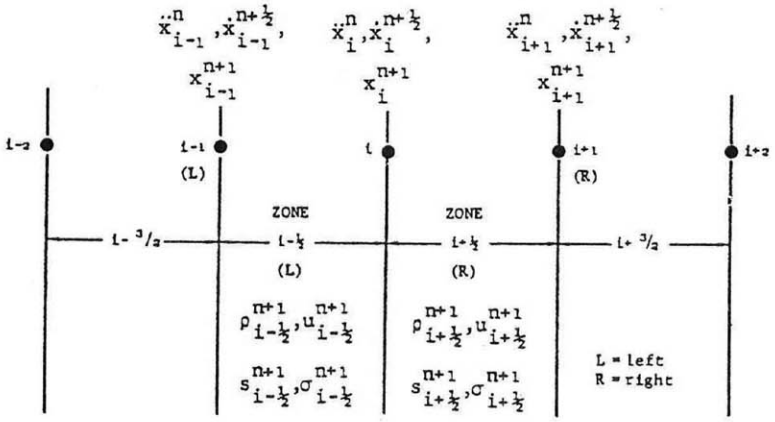


Fig 2　1次元　ラグランジェ・メッシュ

2次元問題の表面積分については、Fig 3を参照して空間に関する変数は、以下の如くGaussの発散定理を用いて、表面積分される。

$$\frac{\partial}{\partial x}(\ )_p^n = \frac{(\ )_{TL}^n S_{TLx}^n + (\ )_{TR}^n S_{TRx}^n + (\ )_{BR}^n S_{BRx}^n + (\ )_{BL}^n S_{BLx}^n}{v_p^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ )_p^n = -\frac{(\ )_{TL}^n S_{TLy}^n + (\ )_{TR}^n S_{TRy}^n + (\ )_{BR}^n S_{BRy}^n + (\ )_{BL}^n S_{BLy}^n}{v_p^n} \quad \cdots\cdots (14)$$

より計算する。Pは、今、計算する点を示し、nは時刻を示す。v_p^nは、点線で囲まれた体積を示し、S_i^nは、iに沿った表面積である。

また、時間積分に関しては、Fig 4, Fig 5に示す如く時間に関する中心Euler法による陽解法を用いる。解の安定性を保証するために、Courantの安定基準より、時間刻幅が決定される。即ち、次式が満足される。

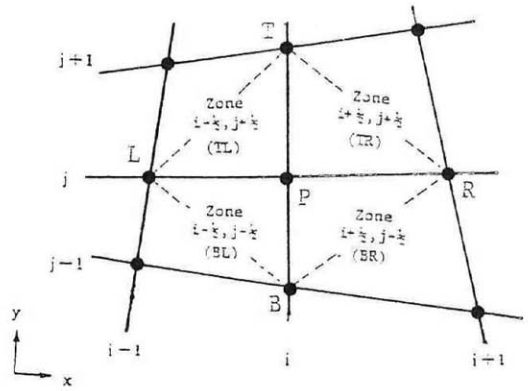


Fig 3　2次元　ラグランジェ・メッシュ

$$\Delta t_{i-\frac{1}{2},\,j-\frac{1}{2}}^{n} = \frac{\Delta t_{i-\frac{1}{2},\,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t_{i-\frac{1}{2},\,j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\Delta t_{i-\frac{1}{2},\,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{\Delta \ell_{i-\frac{1}{2},\,j-\frac{1}{2}}^{n}}{c_{i-\frac{1}{2},\,j-\frac{1}{2}}^{n}} \quad \cdots\cdots (15)$$

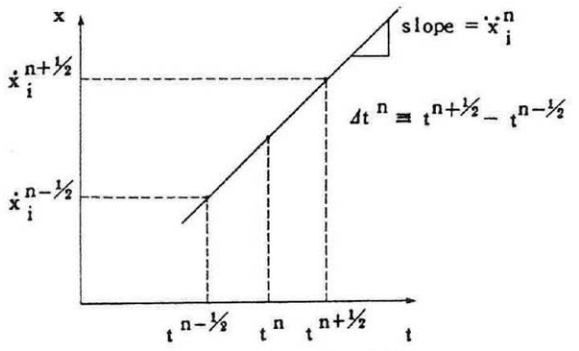


Fig 4　　速度時間積分

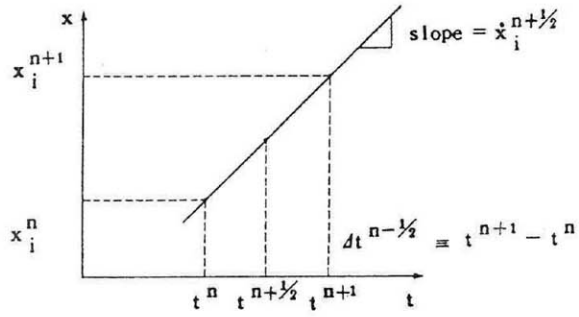


Fig 5　　変位時間積分

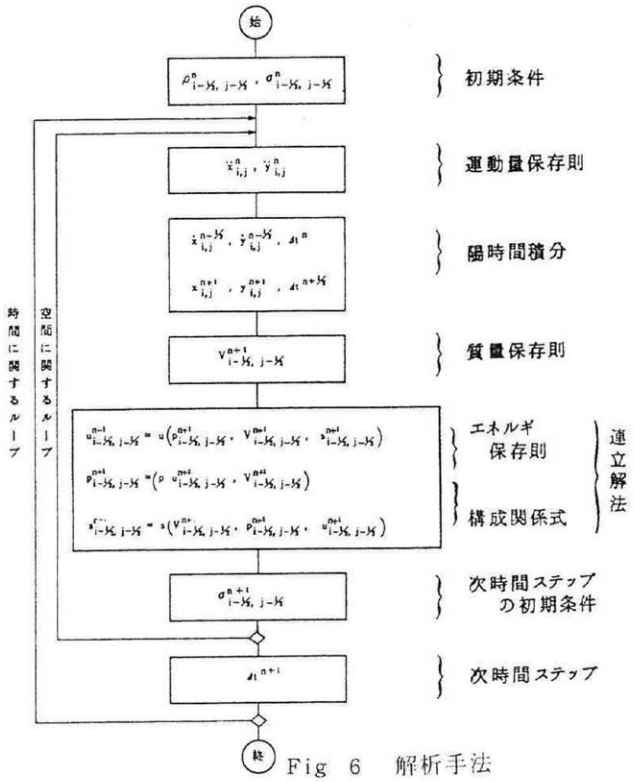


Fig 6　解析手法

ここで、$C_{i,j}^n$は構造物の局所の波の伝播速度で、一般には音の速度と考えられている。$\Delta \ell_{i,j}^n$は一つの要素内の辺の長さの最短距離である。このCourant条件式は、波動伝播問題の数値解析では、波頭が、ある時間にモデル化された要素巾を越えることができないことより、Courant等によって定められた条件式である。即ち、全ての方程式は、一つの要素内で成立する。このことは同様に、Belytschko等によっても証明されている。また、衝撃面後方における不連続性に対する解の振動を消すために人工粘性項を、更に離散化したメッシュ割による計算上のノイズを消す為に、粘性減衰項を用いている。何故ならば、構造物内の波動伝播が非常に速い場合は、要素割をその速度に合せて、定めなければならないが、この方法では、計算時間が多大となり、また、不連続性に対する計算が難しい。Von Neumannの方法により、人工的に波頭の位置を体積歪の変化率より定める手法を取り入れ、不連続性を除去するために、内部エネルギー計算を行う時に考慮する。また、不連続性により計算誤差が生じるので、歪速度の変化に対応した人工粘性の考え方を導入し、同様に内部エネルギーの評価を行う時に考慮する。次に計算手順を示す（Fig 6参照)。陽解法による差分法の場合、t+ Δt時刻の値を求めるのに、t時刻の値を用いる。その為に、陰解法のように、全体の剛性マトリックスを作成する必要がない。ただし、時刻刻みの制限であるCourant条件を考慮して解析し、猶かつ、伝播は、要素内のみで行われるようにしてある。

4. 完全弾塑性解析について

ここでは、非線形解析として、材料的には等方性として、Von Misesの降伏条件を用いて解析を行った。即ち、一般的に、

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p = \frac{d\sigma}{E} + \frac{d\sigma}{H'},\quad H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} \quad \text{または} \quad d\sigma = \frac{EH'}{E+H'}\, d\varepsilon \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

ただし、H　はひずみ硬化率を示し、引っ張りの応力－塑性ひずみ曲線に引いた接線のこう配として与える。dεは全ひずみ増分を示し、dεeは弾性ひずみ増分，dεpは塑性ひずみ増分，Eは弾性係数を示す。塑

性変形は、応力値が弾性限界に達して起こるものである。平面問題においては、平面応力状態（σy, σz, σyz）に対して、

$$\bar{\sigma} = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots (17)$$

を計算する時、$\bar{\sigma}$の値がある一定の応力Yに達して、

$$\bar{\sigma} = Y \quad \cdots\cdots (18)$$

が満足されると降伏が開始する。ここで、Yの値は引っ張り又は圧縮の単軸試験で得られる降伏応力を示す。σは相当応力である。完全弾塑性材料の場合、ひずみ硬化率は0である。山田，Zienkiewicz などが開発し、一般的に用いられている方法で応力－歪曲線に沿った応力になるように、ひずみ量から節点に作用する荷重を算定し、剛性マトリックスを修正し、Newton－Raphson 法にて収束誤差は0.01とし、収束計算を行った。この手法は、有限差分法の中でも適用されている。

5. 計算モデルについて

現状の構造設計で、地震時の構造物の応力・応答解析には陰解法を用いた時間積分法が使用される場合が多い。この解析手法の仮定としては、地震動が地盤より、建築構造物に入力した場合に、瞬時に、建築構造物全体にその地震波が伝播するとの考え方に基づいている。しかしながら、衝撃的な波動が作用する場合には、陽解法による時間積分法を用いた解析法が、波動が構造物に段々に伝播する場合をより正確にとらえると言われている。

ここでは、上記2つの解析手法を用いて実際に計算を行った。その目的とするところは、有限要素法を用いた陰解法による時間積分法と有限差分法による陽解法による時間積分法との両者による解析手法によって差異が、衝撃的な外力を簡単なモデルに作用させた場合に、どの程度生ずるかということである。

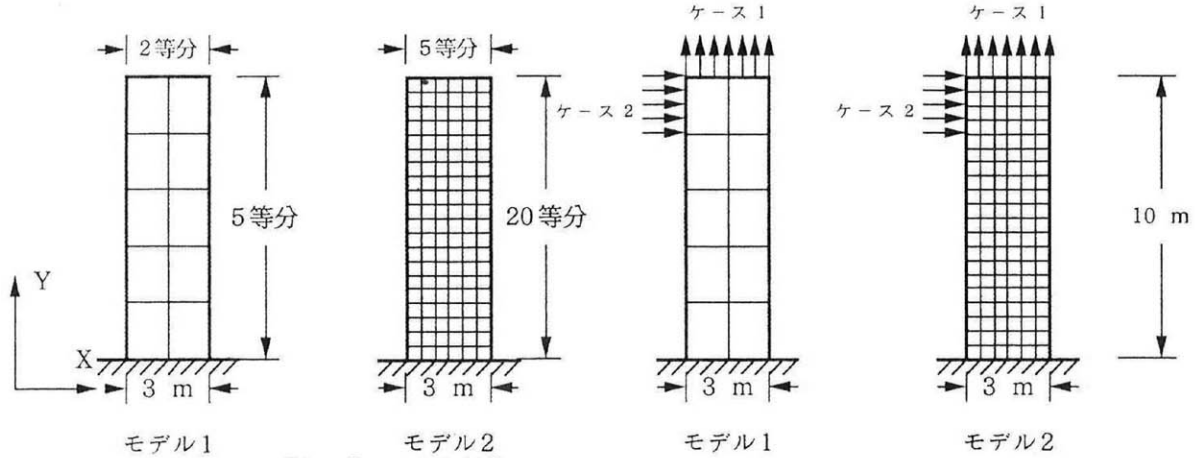


Fig 7　モデル図

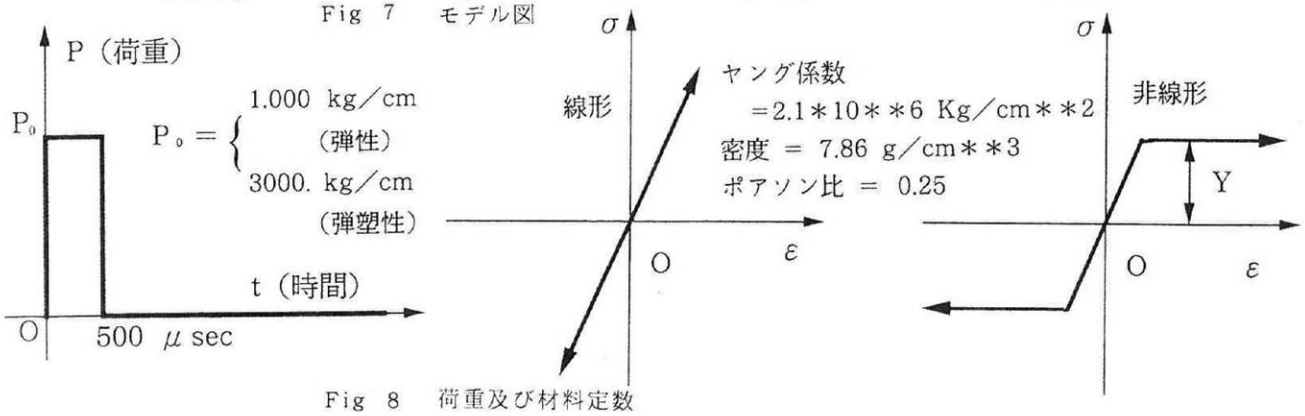


Fig 8　荷重及び材料定数

また、簡単なモデルを用いて、各々の解析手法について、メッシュ割を変えた場合について、材料は線形材料及び完全弾塑性材料の二種類とし、減衰はないものとして計算を行った。解析モデルと荷重ケース及び諸定数については、Fig 7, Fig 8に示す。

線形材料の場合は、衝撃荷重として1kg／cm、完全弾塑性解析の場合においては、降伏応力Yを2.3×10^3kg／c㎡とし、弾塑性解析については衝撃荷重として、3,000kg／cmをFig7に一致させて作用させた。ただし、解析時間については3,000 μ sec まで考え、解析時間刻みは、Courant条件を考慮して定めた。

ここで、陰解法による有限要素法を以後FEMと呼び、陽解法による有限差分法を以後、FDMと呼ぶことにする。またFDMを用いて、モデルは1で荷重ケース1の時で、線形はL（非線形はNL），FDM－M1－C1－Lと表現する。

6. 計算結果について

ここでは、計算結果の一部を示す。モデル化のメッシュ割による差異は明らかである。即ち、メッシュ割を行う場合には、慎重に行う必要がある。このことは、音速とメッシュ割とから決定されるCourant条件を満足するように時間刻みを定めたが、Fig 9が明白に示している。

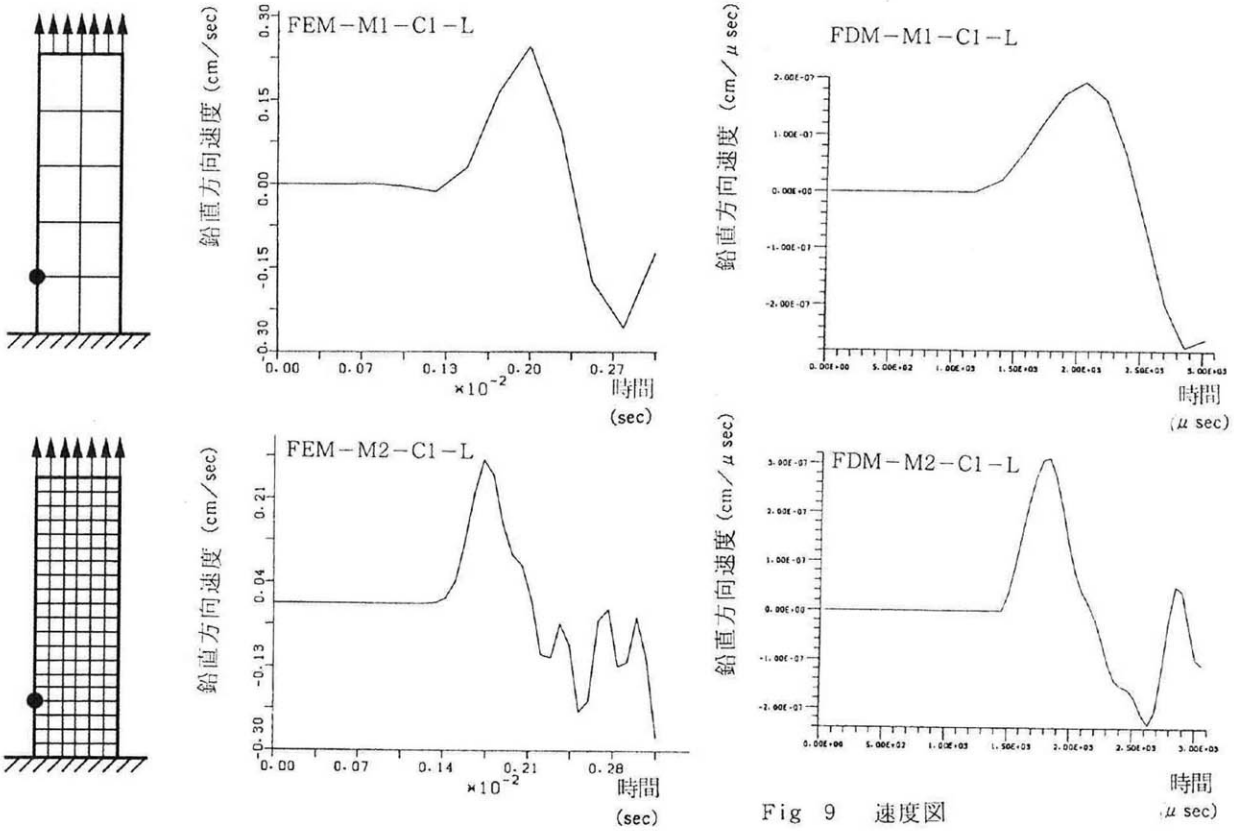
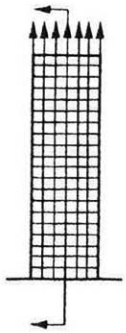


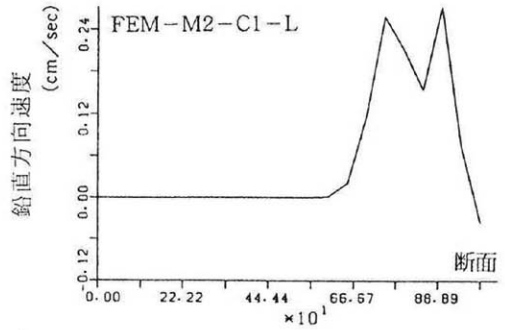
Fig 9　速度図

そこで次に、FEM－M2－C1－LとFDM－M2－C1－Lとを比較してみる。即ち、材の長手方向に一端を固定して、他端を引っ張る場合について考えると、陽解法と陰解法も、ほとんど応答解析結果としての差異は、一部数値計算上の誤差が生じているが、性状としては一致している。まず、各時刻毎の同一点の速度の分布を見ると、Fig 10の如くほぼ同一である。また、速度の分布と応力の分布は、Fig 11に示すように同じ分布となるので、応力の伝播についても、FEM，FDMともに正しい計算がなされていると考えられる。一つの例として、応力分布の比較をすると、Fig 12の如く一部の数値上の誤差はあるが、一致している。一方、横方向力を作用した場合については、即ちFEM－M2－C2－L，FDM－M2－C2－Lには、Fig 13に

示すように差異が認められる。傾向としては似ているが、鉛直方向に衝撃力を作用した場合に比較して、水平方向に衝撃力が作用した場合には、FEMの方が、FDMに比較して、反応が、時間的に速い。この際は、FEMは、全体剛性マトリックスを作るために、系全体に力がすぐに伝播するという式を作成しているためと反射波の影響によるものと思われる。

完全弾塑性解析の結果として、Fig 14にFEM－M2－C1－NL, FDM－M2－C1－NLに示すように、結果はピーク値も、線形材料と逆で、陽解法の方が速度で0.5×10^{2}cm／μ sec 程度速度（位置は図に示す）、小さく出ていると同時に、反応する時刻に対しては、陽解法の方が速い時間で行われている。同様にして、応力に対してはピークの値はほぼ同じであるが、反応の仕方が異っている。次に、横方向力が作用した場合においては、Fig 15にみられるピーク値に於いても、差異が見られる。特に、非線形になると、顕著にあらわれる。





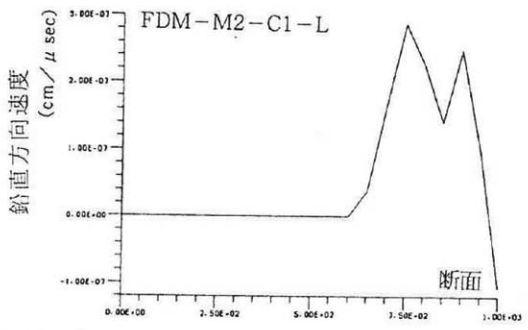
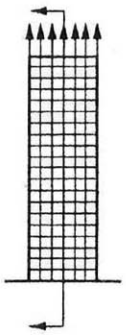
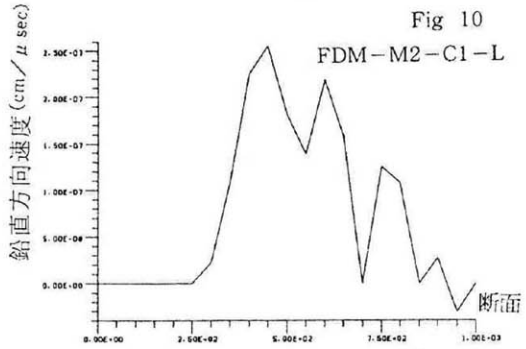


Fig 10　速度分布図





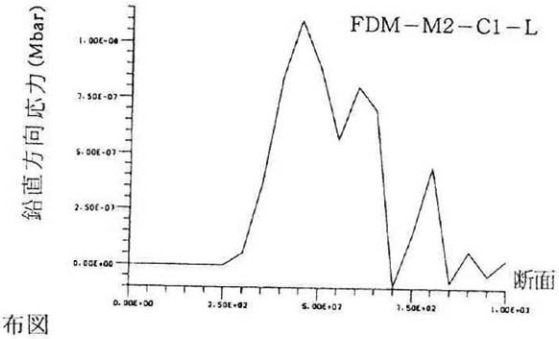
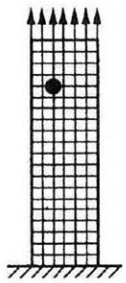
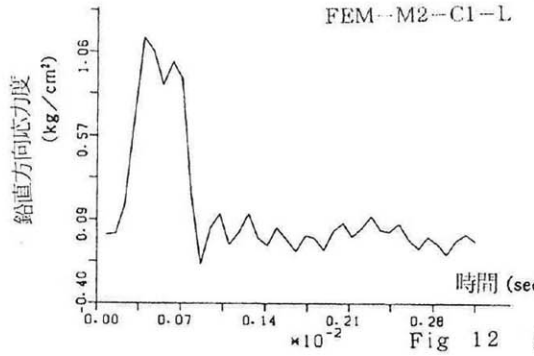


Fig 11　分布図





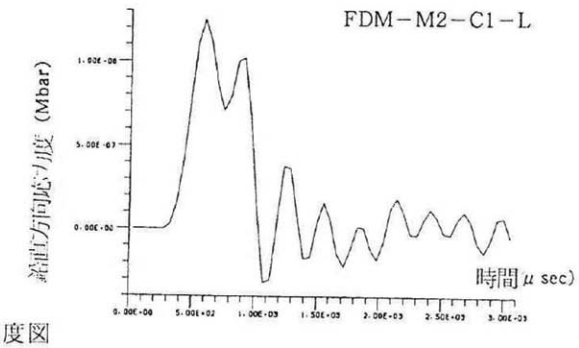
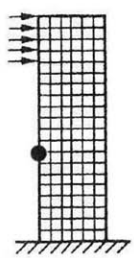
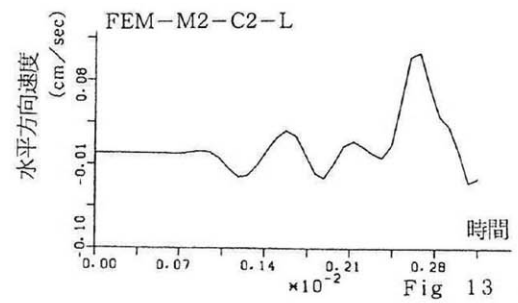


Fig 12　速度図





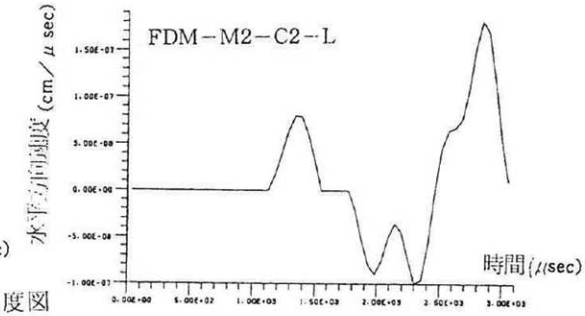


Fig 13　速度図

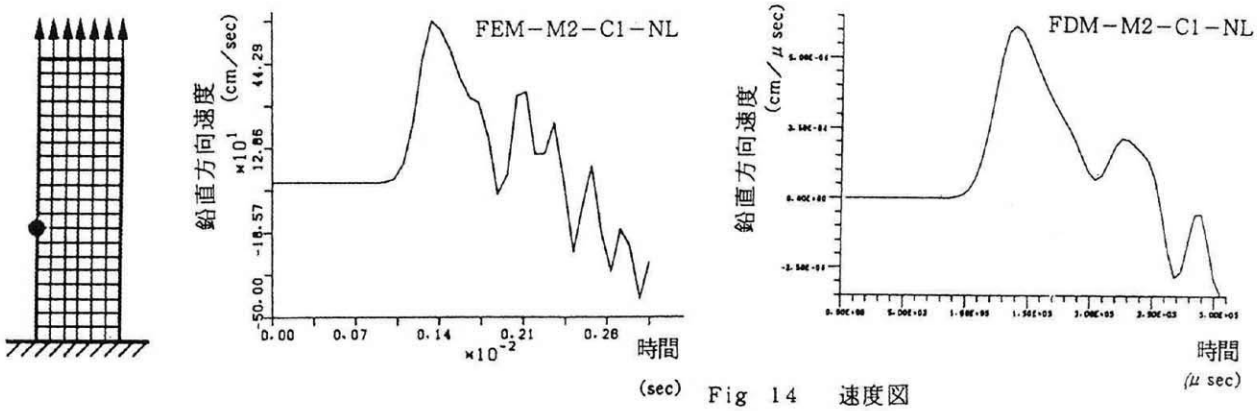


Fig 14　速度図

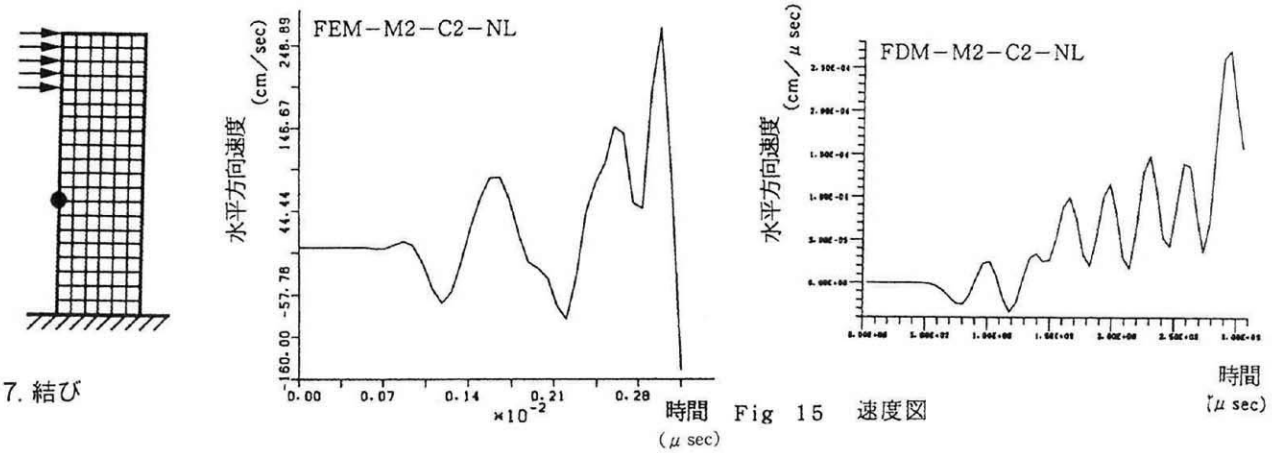


Fig 15　速度図

7. 結び

今回の数値計算においていえることは、荒いメッシュ割と細いメッシュ割とでは差異があり、明らかに、モデル化について材質等を考慮し、材料内でのクーラント条件をも考慮し、また、作用する外力の方向等を考えたメッシュ割が必要である。また、縦方向への引張の場合はよく合っているが、波が反射してくるところでは、幾分差異が見られている。また結果として、軸方向の衝撃引張り力が棒に作用した時の変位は、静的な引張り力が作用した時の2倍としているチィモシェンコの結果と一致しているが、横方向の分布力を作用させる場合は、縦方向の引張りでは見られぬ差異が生じている。横方向に力を作用した場合には、進行波と反射波とが複雑に干渉し合った挙動を生じるために、波頭の位置等を評価していない陰解法より、陽解法は優れていると思われる。然し乍ら、解析の安定性や、時間刻み等により、計算時間も異なる。全般的にFEM、即ち、陰解法の方が陽解法に比較してこの程度のモデルの場合は時間的に早く、緩慢に反応している。これは、陰解法を用いた時に現われる現象の一つであると考えられ、即ち、全体剛性マトリックスを作成することにあると考えられる。このことは、ある節点に力を作用させた時に、他の全ての点へ力が伝達することを表現しているためであると思われる。非線形材料の場合は逆の傾向が顕著にあらわれる。今後は、非線形性の問題を検討し，解析手法の感度，干渉とメッシュ巾の関係、複雑な構造物に対する検討も深める積りである。

謝辞

本研究を進めるに当り貴重な御意見を頂きました東京工業大学教授　黒正清治博士に深く感謝いたします。また、当論文の査読に御骨折頂き、御親切且つ詳細なる御意見を頂いた先生方にも厚く御礼申しあげます。

参考文献

Hofmann " STEALTH, A lagrange explicit finite difference code" User's manual, ADINA Eng. Inc. " Automatic dynamic incremental nonlinear analysis" User's manual, Bathe, K.J. " Finite element procedures in engineering analysis", チィモシェンコ "工業振動学", T. BELYSCHKO & T. HUGES "Computational Methods for Transiet Analysis", T. BELYSCHKO "Explicit Time Integration of Structure Mechanical Systems", J. Von Neumann & R. Richtmyer "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks." J. Appl. Phys., 21, March 1950, 181−210 等