Architectural Institute of Japan

【カテゴリーII】

日本建築学会構造系論文集　第604号，37-46，2006年6月
J. Struct. Constr. Eng., AIJ, No. 604, 37-46, Jun., 2006

広帯域性の変動風力を受ける弾塑性構造物の応答変位振幅の確率分布

PROBABILITY DISTRIBUTION FUNCTION OF RESPONSE AMPLITUDE FOR AN ELASTO-PLASTIC STRUCTURE SUBJECTED TO WIDE-BAND FLUCTUATING WIND FORCE

吉江慶祐*，大熊武司**，北村春幸***，和田　章****
Keisuke YOSHIE, Takeshi OHKUMA, Haruyuki KITAMURA and Akira WADA

This study is the first step of the development of the prediction technique for wide-band random response of a structure subjected to fluctuating wind force. The authors have presented a prediction method of fluctuating wind-force induced an elasto-plastic response based on energy balance, and showed its validity. However, the method was limited to the case of a narrow-band random process. Therefore, it is necessary to expand the method to the case of a wide-band random process in order to make the method more practical. This paper presents a prediction model of a probability density function of an elasto-plastic response displacement amplitude of a structure subjected to fluctuating wind-force, and, in turn, investigates the validity of the model.

Keywords: *wind force, stationary random process, wide-band process, probability density function, elasto-plastic response*
風外力，定常ランダム過程，広帯域性，確率密度関数，弾塑性応答

1. 序

筆者らは既報[1]「エネルギーの釣合に基づく変動風力を受ける弾塑性構造物の応答予測手法」において，風直交方向応答のような平均風力がゼロで構造物の固有振動数成分応答が卓越する場合について，エネルギーの釣合いに基づいて，時刻歴応答解析を用いずに弾塑性構造物の応答予測が可能であることを示した。提案手法は，構造物の応答変位のrms値と塑性率の関係を，基本的な定常ランダム応答の性質をモデル化して応答変位rms値・塑性率の期待値の理論解を用いて導いており，信頼性と一般性の高い手法であると考える。また，エネルギーの釣合から直接的に弾塑性応答量を評価することが可能であり，変動風力による入力エネルギー量と構造物の降伏変形・降伏せん断力と塑性変形量が直接関係づけられることで，変動風力下での構造物の弾塑性設計の信頼性を確保することが可能になるものと思われる。

しかし，弾塑性構造物の風応答予測を実用化するためには，風方向風力のような平均風力を含み，かつ低振動数成分を中心に広帯域にパワーを有する変動風力に対する応答予測手法も必要であり，重要となる。

既報[1]で指摘したように，変位依存型の履歴特性を有する履歴減衰型の構造物の弾塑性性状を捉えるためには最大応答値の他に，ピーク・ピーク変位振幅のような全振幅を求める必要がある。しかし，弾性応答の場合について定常ランダム過程の振幅の極大値または極小値の確率分布が明らかになっている[例えば2),3)]以外は，構造物の応答の全振幅を対象とした研究はほとんど見られない。

本研究は，エネルギーの釣合いに基づく弾塑性構造物の広帯域な風応答予測手法の開発の第1段階として，平均値がゼロの広帯域性の変動風力を受ける弾塑性構造物の応答変位振幅の確率密度関数の予測手法を検討し，その有効性を示すことを目的とする。辻田ら[4]は風方向応答のような広帯域なランダム応答を，固有振動数より低振動数成分（準静的成分に相当）と固有振動数付近の成分（共振成分）に分離して，それぞれ別々に応答を評価することで，応答予測が可能であることを示している。本研究も辻田らの研究を参考にして，構造物の広帯域な弾塑性風応答を準静的成分と共振成分に分離し，各々ならびに両者の組み合わせとして応答性状の分析を行い，広帯域なランダム応答変位振幅の確率密度関数の予測方法を提案する。さらに，提案手法により広帯域な弾塑性風応答の履歴吸収エネルギーを評価し，時刻歴応答解析結果と比較することで提案手法の有効性を確認する。

2. 検討に用いる変動風力の特性

本研究は，振動系の固有振動数よりも低振動数側にもパワーを有する外乱に対する応答を検討の対象にしている。減衰の小さな振動系の場合であっても，固有振動数より低い振動数範囲での変位応答倍率はほぼ1であるので，低振動数領域での応答特性は，外乱の特

* ㈱日建設計構造設計室　主管，東京工業大学大学院博士課程(社会人プログラム)・工修
** 神奈川大学工学部建築学科　教授・工博
*** 東京理科大学理工学部建築学科　教授・博士(工学)
**** 東京工業大学建築物理研究センター　教授・工博

Senior Structural Engineer, Structural Engineering Dept., Nikken Sekkei Ltd., Graduate Student, Tokyo Institute of Technology, M. Eng.
Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kanagawa University, Dr. Eng.
Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, Dr. Eng.
Prof., Structural Engineering Research Center, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

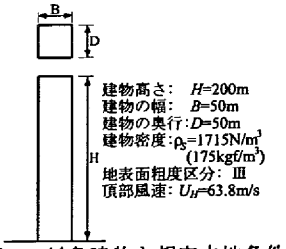


図1 対象建物と想定立地条件

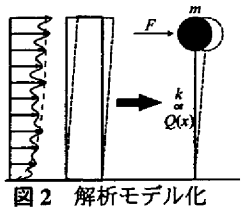


図2 解析モデル化

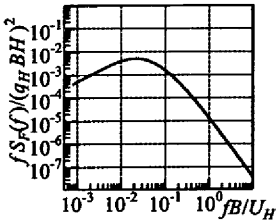


図3 変動風力のパワースペクトル密度

性そのものが表れる。以下の検討では，定常ランダム外乱を受ける振動系の定常応答の統計的性質を，時刻歴応答解析を用いたモンテカルロシミュレーションを用いて検証するため，検討に用いる外乱の特性を明らかにする必要がある。ここでは，検討に用いる模擬風力波形の作成方法について示し，模擬風力波形の振幅特性について検討する。なお本論文では，「時刻歴応答解析の結果」は時刻歴応答解析を用いたモンテカルロシミュレーションによる応答結果の確率統計的な評価結果をさすものとする。

本研究の検討に用いる解析モデルは，図1に示す建物を対象とし，1次モードの風応答のみに注目し（弾塑性系については塑性化後も建物の振動モードに変化が生じないと仮定），水平1自由度の1質点系モデルとする。解析モデルの質量 m と外力 F は，建物の1次モードを頂部が1の直線モードとした時のモーダル質量とモーダル外力として与えるものとする（図2）。弾性剛性 k または復元力特性 $Q(x)$ は後述する。広帯域性の変動風力として，「建築物荷重指針・同解説」[5]（以下「荷重指針」）による風方向変動風力のパワースペクトル密度をもとに，模擬風力波形を作成する。図3に検討に用いる変動風力のパワースペクトル密度を示す。図中の f は振動数，q_H は建物頂部での速度圧（$q_H = 1/2 \cdot \rho U_H^2$, ρ は空気密度）を示す。風速は既報[1]と同じく頂部風速 U_H =63.8m/s とする。模擬風力波形は，変動風力を定常ガウス過程と仮定し，次式に示す三角級数モデル[6]によりシミュレートする。

$$F(t) = \sum_{k=1}^{N} \{a_k \cdot \cos(\omega_k \cdot t) + b_k \cdot \sin(\omega_k \cdot t)\} \quad (1)$$

ただし，a_k，b_k は平均値0，分散 $\sigma_F^2(\omega_k) = S_F(\omega_k) \cdot d\omega$ のガウス分布に従うそれぞれ独立な確率変数，F は変動風力，S_F は変動風力のパワースペクトル密度，t は時間，ω は円振動数。

模擬風力波形は1波形につき0.1秒刻みで16384ステップ作成する。なお，N=16384，振動数 $f(=\omega/2\pi)$ の範囲は $1/1638.4 \sim 1/0.1$(Hz)，振動数刻み $\Delta f = 1/1638.4$(Hz) とした。(1)式による模擬風力波形の先頭はゼロとは限らないため，過渡応答の影響を減らし定常状態の評価を行うため，各波形に次式の包絡関数 $A(t)$ を乗じる。

$$A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{T_s} t\right)\right) & (0 \leqq t < T_s) \\ 1 & (t > T_s) \end{cases} \quad (2)$$

ただし，T_s は包絡関数の立ち上がり時間（50sec）。

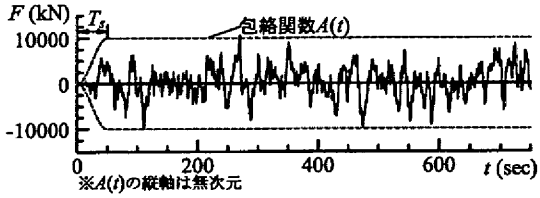


図4 模擬変動風力の時刻歴波形例

図4に模擬風力波形例を示す。各振動数 ω_k 成分がそれぞれガウス過程なので，その級数和である $F(t)$ もガウス過程であることは明らかである。また，$F(t)$ からある振動数帯域成分のみを取り出した時刻歴波形もガウス過程となることも自明である。ここで，境界周期 T_{Bound}（または境界振動数 f_{Bound}）を設け，$F(t)$ を $f_{Bound}(=1/T_{Bound})$ より低振動数成分のみを，後述するフーリエ変換・逆変換を利用した方法で分離した波形 $F_L(t)$ を作成し，$F_L(t)$ の極値 $F_{L,p}$ の確率密度関数（ここでは極大値の頻度分布を全極大値数と振幅の刻み幅で基準化したものとする）を求める。パワースペクトル密度が $S_\xi(\omega)$ である定常ガウス過程 ξ の極大値 ξ_p の確率密度関数 $p(\xi_p)$ は(3)式で与えられる。[3]（極大値は，図5に示す正側と負側の極大値）

$$p(\xi_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\left[\varepsilon \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\xi_p^2}{\varepsilon^2\sigma_\xi^2}\right) + \sqrt{1-\varepsilon^2}\frac{\xi_p}{\sigma_\xi}\exp\left(-\frac{\xi_p^2}{2\sigma_\xi^2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{2}}\frac{\xi_p}{\varepsilon\sigma_\xi}\right)\right\}\right] \quad (3)$$

ただし，σ_ξ は ξ の標準偏差，$\mathrm{erf}(\tau)$ は誤差関数で次式による。

$$\mathrm{erf}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-t^2} dt \quad (4)$$

また，ε はパワースペクトル密度の特性を表すパラメータで次式による。

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (5)$$

$$m_j = \int_0^\infty \omega^j S_\xi(\omega) d\omega \quad (6)$$

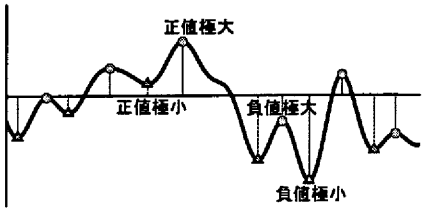


図5 広帯域ランダム過程の時刻歴波形の模式図

表1 パワースペクトル密度の形状特性を表すパラメータ ε

T_{Bound}	9sec	15sec	21sec
ε	0.845	0.788	0.753

ただし，$U_H = 63.8m/sec$

図6に境界周期 T_{Bound}=9sec, 15sec, 21sec の時の $F_L(t)$ の極大値 $F_{L,p}$ の確率密度関数を示す。図中の曲線は(3)式による極値分布の理論値に低振動数成分分離波形 F_L の標準偏差 σ_{F_L} と変動風力のパワースペクトル密度 $S_F(f)$ を用い，次式により m_j を求め，それを(5)式

NII-Electronic Library Service

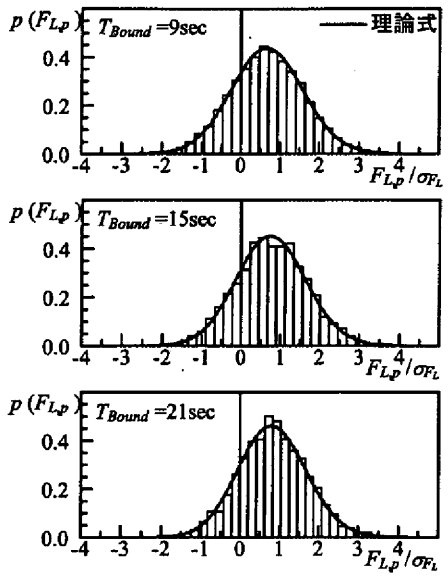


図 6　模擬変動風力波形の低振動成分の極大値確率密度関数

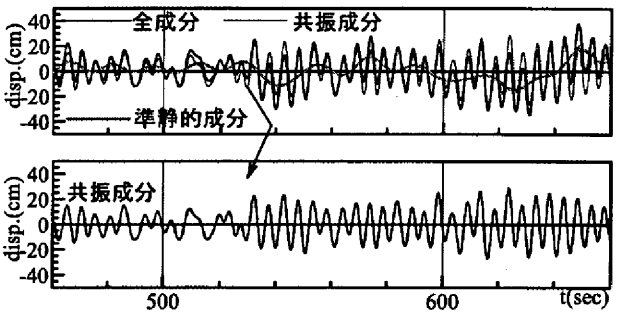
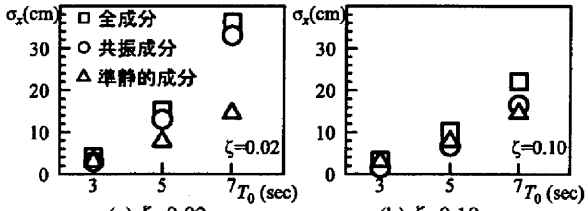
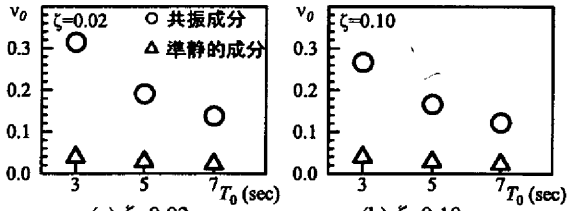


図 8　変位応答時刻歴波形例 (T_0 =5sec, ζ =0.02)



(a) ζ=0.02　(b) ζ=0.10

図 9　応答変位 rms 値



(a) ζ=0.02　(b) ζ=0.10

図 10　ゼロクロッシング数

表 2　解析パラメータ

T_0	3sec, 5sec, 7sec
ζ	0.02, 0.10

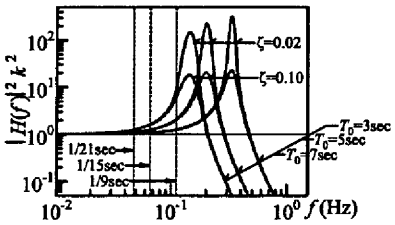


図 7　変位応答の伝達関数

に代入して求めた ε を用いたものである。用いた ε を表 1 に示す。

$$m_j = \int_0^{f_{Bound}} 2\pi(2\pi f)^j S_F(f) df \qquad (7)$$

模擬風力波形の低振動数成分分離波形 $F_L(t)$ の極大値分布は (3) 式とよく一致することが確認できる。(3) 式は，低振動数成分分離波形の標準偏差 σ_{F_L} と，パワースペクトル密度から (5),(7) 式を用いて求まる ε によって決定され，この 2 つのパラメータによって外乱の極大値分布を表すことができることを確認した。

3. 減衰弾性系の応答振幅の確率分布

はじめに 1 質点減衰弾性系の時刻歴風応答解析を行い，広帯域ランダム応答時の応答振幅の確率分布について検討する。解析モデルは前章で説明したモデルであり，解析パラメータは固有周期 T_0，減衰定数 ζ とする。解析パラメータを表 2 に示す。前章で説明した模擬風力波形 (全長 1638.4 秒) を 200 個作成し，解析開始から 400 秒～1000 秒と，1000 秒～1600 秒を評価対象とし，評価時間 600 秒の計 400 サンプルで評価を行う。

構造物の風応答変位の変動成分は，広帯域定常ランダム過程の低振動数成分と狭帯域定常ランダム過程の共振成分の和と見なすことができる[4]。そこで，応答変位時刻歴波形 $x(t)$ を低振動数成分と共振成分に分離して以下の検討を進める。応答変位時刻歴波形成分の分離は，応答時刻歴波形 $x(t)$ をフーリエ変換し，得られたフーリエスペクトルを境界振動数 $f_{Bound} = 1/T_{Bound}$ (T_{Bound} は境界周期 (sec) とする) を境に低振動数成分と高振動数成分に分離し，それぞれのフーリエスペクトルを逆フーリエ変換することにより行う。境界周期として振動系の固有周期から十分に離れて長い周期を選べば，低振動数成分は外乱による強制振動が，高振動数成分は構造物の共振成分がそれぞれ支配的となる応答を示すと考えられる。以後，低振動数成分を準静的成分 (添字 B で表す)，高振動数成分を共振成分 (添字 R で表す) とする。図 7 に入力した模擬風力波形と応答変位から求めた変位応答の伝達関数を示す。伝達関数からほぼ共振の影響のなくなる固有振動数の 1/3 の振動数 (固有周期の 3 倍の周期) を境界振動数 (境界周期) とする。

図 8 に応答変位の時刻歴波形と準静的成分と共振成分の分離波形の例を示す。図の上段は全成分に準静的成分，共振成分を重ねて，下段は共振成分だけを取り出して示してある。共振成分は平均変位であるゼロを交差する間に極値がほぼ 1 回だけ現れており，狭帯域な応答となっていることが確認できる。これに対して，準静的成分はゼロを交差する間に極値が複数回現れており広帯域な応答となっている。

図 9 に応答変位の全成分，共振成分および準静的成分の標準偏差 (rms) を，図 10 に応答変位の共振成分および準静的成分のゼロクロッシング数 ν_0 を示す。共振成分の応答変位 rms 値は固有周期，減衰定数の変化とともに変化しているが，準静的成分は減衰定数によりほとんど変化していない。これは，準静的成分が外乱に支配され，構造物の振動特性の影響が小さいことによると考えられる。

図 11 に変位応答波形の例を示し，以降の考察に用いる極大・極小値の定義を示す。図 11 上段に全成分応答波形を，中段・下段に準静的成分波形と共振成分波形をそれぞれ示す。上段の灰色の実線は準静的成分波形である。図 11 中段，下段に示すように準静的成分波形，共振成分波形がゼロを正勾配で公差する周期をそれぞれ準静的成分および共振成分のゼロクロスサイクルとする。準静的成分

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

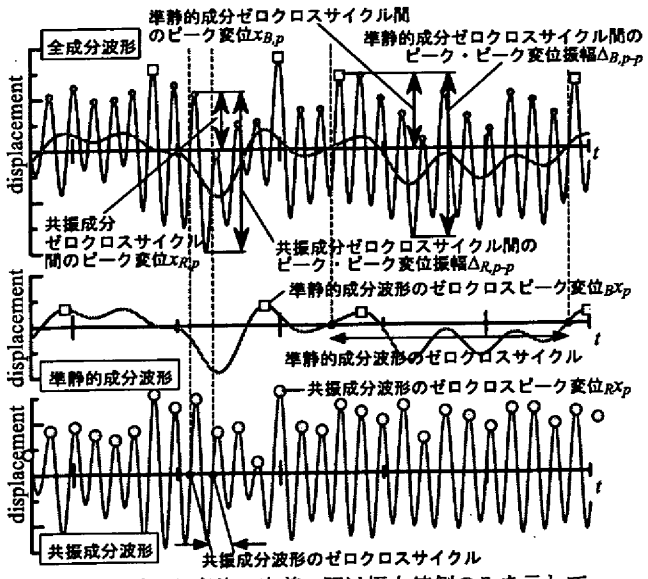


図 11 ピーク変位の定義 (図は極大値側のみを示している。極小値側も同様)

および共振成分波形のそれぞれのゼロクロスサイクル間の極値のうち，最大の極大値および最小の極小値のものを準静的成分波形および共振成分波形のゼロクロスピーク変位とし，それぞれ $_Bx_p$，$_Rx_p$ とする。図 11 上段に示すように，準静的成分および共振成分のゼロクロスサイクル間の全成分波形の極値のうち，最大の極大値および最小の極小値を準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{B,p}$，共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{R,p}$ とする。さらに，隣り合う準静的成分・共振成分それぞれのゼロクロスサイクル間のピーク変位の差をそれぞれ準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位振幅 $\Delta_{B,p-p}$，共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位振幅 $\Delta_{R,p-p}$ とする。

弾塑性系の復元力特性は変位依存性をもつので，その応答評価や応答性状の把握のためには変位の絶対量の情報が必要であり，変位の絶対量である準静的成分および共振成分それぞれのゼロクロスピーク変位 $x_{B,p}$，$x_{R,p}$ の確率分布を知る必要がある。また，履歴吸収エネルギーの評価のためには既報[1]が指摘するように，応答変位の全振幅が必要であり，準静的成分および共振成分それぞれのゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位振幅 $\Delta_{B,p-p}$，$\Delta_{R,p-p}$ の確率分布を知る必要がある。以下に，準静的成分・共振成分それぞれのゼロクロスサイクル間のピーク変位，ピーク・ピーク変位振幅 $x_{B,p}$，$x_{R,p}$，$\Delta_{B,p-p}$，$\Delta_{R,p-p}$ の確率密度関数の理論式を求める。

なお，ξ を標準偏差 (rms)σ_ξ の確率変数とするとき，ガウス分布 $p_{Gauss}(\xi)$，レーリー分布 $p_{Rayleigh}(\xi)$ は，それぞれ以下の式で表される。

$$p_{Gauss}(\xi;\sigma_\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}) \tag{8}$$

$$p_{Rayleigh}(\xi;\sigma_\xi)=\frac{\xi}{\sigma_\xi^2}\exp(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}) \tag{9}$$

また，応答変位の全成分波形の rms(標準偏差) 値を σ_{0x}，準静的成分波形および共振成分波形の rms 値をそれぞれ σ_{Bx},σ_{Rx} とし，ε は外力のパワースペクトル密度の特性を表すパラメータ (表 1 参照) とする。

(1) 準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{B,p}$

準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{B,p}$ は，準静的成分ゼロクロスサイクルが共振成分ゼロクロスサイクルより十分に長いので，共振成分ゼロクロスサイクル間の準静的成分の変動が小さく，ほぼ一定値であると仮定すれば，準静的成分波形のゼロクロスピーク $_Bx_p$ と共振成分波形のゼロクロスピーク $_Rx_p$ の和とみなすことが可能となる。また，準静的成分波形のゼロクロスピーク $_Bx_p$ は，広帯域性を考慮した定常ガウス過程の極大値分布の理論式 ((3) 式) の正値部分と相似[4]と仮定する。以上より，$x_{B,p}$ の確率密度関数は次式により表される。

$$p_{x_{B,p}}(x;\sigma_{Bx},\sigma_{Rx},\varepsilon)=\int_0^\infty\frac{1}{\phi}p_{w.b.p}(\xi;\sigma_{Bx},\varepsilon)p_{Rayleigh}(x-\xi;\sigma_{Rx})d\xi \tag{10}$$

$$\text{ただし},\phi=\int_0^\infty p_{w.b.p}(\xi;\sigma_{Bx},\varepsilon)d\xi$$

$p_{w.b.p}(\xi;\sigma_{Bx},\varepsilon)$ は広帯域性を考慮した定常ガウス過程の極大値分布の理論式 ((3) 式) を示す。

(2) 共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{R,p}$

共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{R,p}$ は，共振成分波形のゼロクロスピーク $_Rx_p$ とピーク発生時刻における準静的成分変位 x_B との和となり，$_Rx_p$ と x_B は無相関に現れる，つまり独立した事象であると仮定すれば，$x_{R,p}$ の確率密度関数は次式により表される。

$$p_{x_{R,p}}(x;\sigma_{Rx},\sigma_{Bx})=\int_0^\infty p_{Rayleigh}(\xi;\sigma_{Rx})p_{Gauss}(x-\xi;\sigma_{Bx})d\xi \tag{11}$$

(3) 準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位 $\Delta_{B,p-p}$

準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位 $\Delta_{B,p-p}$ は，連続する正・負側の準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{B,p}(i)$, $x_{B,p}(i+1)$ の差として表すことができる。

$$\Delta_{B,p-p}(i)=|x_{B,p}(i+1)-x_{B,p}(i)|=|x_{B,p}(i+1)|+|x_{B,p}(i)| \tag{12}$$

ここで，準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{B,p}$ が正・負側に無相関であると仮定すると，$\Delta_{B,p-p}$ の確率密度関数は (10) 式を用いて次式により表される。

$$p_{\Delta_{B,p-p}}(x;\sigma_{Bx},\sigma_{Rx},\varepsilon)=\int_0^\infty p_{x_{B,p}}(\xi;\sigma_{Bx},\sigma_{Rx},\varepsilon)p_{x_{B,p}}(x-\xi;\sigma_{Bx},\sigma_{Rx},\varepsilon)d\xi \tag{13}$$

(4) 共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位 $\Delta_{R,p-p}$

i 番目の共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位 $\Delta_{R,p-p}(i)$ は，連続する正・負側の共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{R,p}(i)$ と $x_{R,p}(i+1)$ の差として表すことができる。共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{R,p}$ は共振成分波形のゼロクロスピーク $_Rx_p$ とピーク発生時刻 t_i における準静的成分波形の変位 $_Bx$ との和なので，

$$\Delta_{R,p-p}(i)=|[_Rx_p(i+1)+_Bx(t_{i+1})]-[_Rx_p(i)+_Bx(t_i)]| \tag{14}$$

準静的成分波形の変位 $_Bx$ は平均値ゼロのガウス過程に従うので，$E[_Bx(t_{i+1})-_Bx(t_i)]=0$ ($E[\ ]$ は期待値を表す) となり，共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位は次式で評価が可能となる。

$$\Delta_{R,p-p}(i)=|_Rx_p(i+1)-_Rx_p(i)| \tag{15}$$

NII-Electronic Library Service

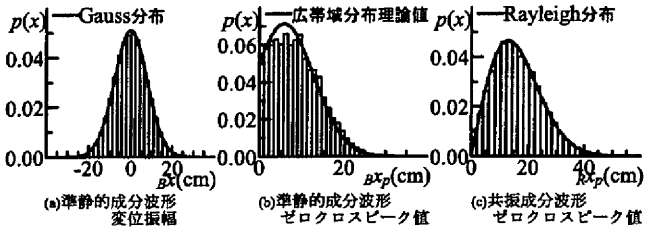
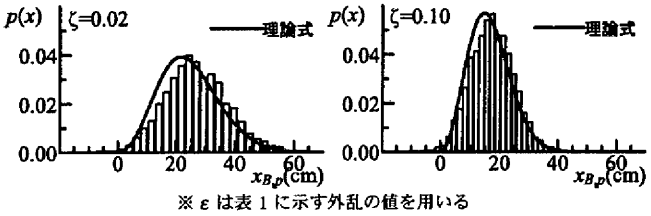


図 12 応答変位振幅とゼロクロスピーク変位の確率密度関数 (T_0 =5sec, ζ =0.02)



※ ε は表 1 に示す外乱の値を用いる

図 13 応答変位の準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位の確率密度関数 (T_0 =5sec)

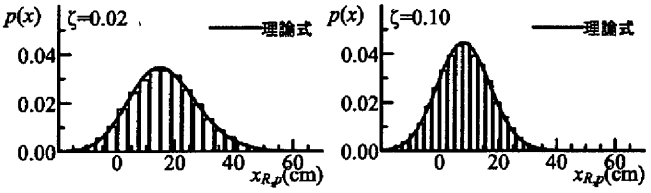


図 14 応答変位の共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位の確率密度関数 (T_0 =5sec)

よって $\Delta_{R,p-p}(i)$ の期待値は，既報[1]に示されているように，ランダム振動波形から部分サンプルを切り出し，極大値の時刻を合わせて重ね合わせ自由振動波形を抽出する RD 法 (Random Decrement 法)[7] の概念を応用して，次式で表すことができる。

$$E[\Delta_{R,p-p}(i)] = (1+\beta)\ |{}_R x_p(i)| \tag{16}$$

ただし，　$\beta = \exp(-\zeta \cdot \pi)$ (17)

ζは振動系の減衰定数。

共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位の確率密度関数は，$\Delta_{R,p-p} = (1+\beta)_R x_p$ であり，${}_R x_p$ は rms 値が σ_{Rx} のレーリー分布に従うので，rms 値が $(1+\beta)\sigma_{Rx}$ のレーリー分布として次式で表すことができる。

$$p_{\Delta_{R,p-p}}(x;\sigma_{Rx},\beta(\zeta)) = p_{Rayleigh}(x,(1+\beta(\zeta))\sigma_{Rx}) = \frac{x}{(1+\beta)^2\sigma_{Rx}^2}\exp(-\frac{x^2}{2(1+\beta)^2\sigma_{Rx}^2}) \tag{18}$$

なお，$p_{w.b.p}(x)$((3) 式) が誤差関数を含んでいるため，(10) 式の積分を開くことが困難である。よって以下の検討では，ここで示した応答変位の確率密度関数の基本式 (10), (11), (13),(18) 式を数値積分し，それぞれの確率密度関数を求めている。

図 12 に応答変位の準静的成分波形の振幅と，準静的成分波形および共振成分波形のゼロクロスピーク値の確率密度関数の例を示す。各図中の曲線は，時刻歴解析結果の準静的成分，共振成分それぞれの応答変位の rms 値と，表 1 に示す変動風力の準静的成分のみのパワースペクトル密度の特性を表すパラメータ ε を用いて求めた，ガウス分布 ((8) 式)，広帯域ランダム過程の極大値分布の理論式 ((3) 式)，レーリー分布 ((9) 式) をそれぞれ示す。図 12(a), (c) に示すように，時刻歴応答解析結果による応答変位の準静的成分波形の変位振幅と共振成分波形のゼロクロスピーク変位の確率密度関数は理論式とよく合っていることが確認できる。図 12(b) に示す準静的成分波形のゼロクロスピーク変位の確率密度関数の理論値は，時刻歴応答解析結果に対して振幅の小さい部分に少し違いが見られるが，全体としてはよく適合している。図 13 に準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位，図 14 に共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位の確率密度関数を示す。また，図 15 に準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位，図 16 に共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位の確率密度関数を示す。図中の曲線は，時刻歴応答解析による準静的成分，共振成分それぞれの応答変位の標準偏差 σ_{Bx}, σ_{Rx}，および表 1 に示すパラメータ ε を用いて求めた理論式 ((10),(11),(13),(18) 式) である。

図 13 の準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位，および図 15 の準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位の確率密度関数では，提案する理論式は時刻歴応答解析結果よりやや小さな振幅に極大値をもち，誤差を生じているが，よく適合している。$\Delta_{B,p-p}$ は，(12) 式に示されるように互いに独立した 4 つの確率変数 (連続する正・負それぞれの ${}_B x_p$ と ${}_R x_p$) の和となるので，その確率密度関数は中心極限定理により，平均値と分散がそれぞれ 4 つの変数の平均値と分散の和となる正規分布で近似可能と考えられる。図 15 にこの近似式を一点鎖線で示している。ここで示す近似式は，4 つの確率変数の結合が，(10) 式の準静的成分ゼロクロスピークを任意に 2 つ取り出し，その和 (連続する正・負側の差はそれぞれの絶対値の和) をとることに相当するので，次式で平均値 μ と分散 σ^2 を与えた正規分布である。

$$p'_{\Delta_{B,p-p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) \tag{19}$$

$$\mu = 2\int_0^\infty x \cdot p_{x_{B,p}}(x;\sigma_{Bx},\sigma_{Rx},\varepsilon)dx$$

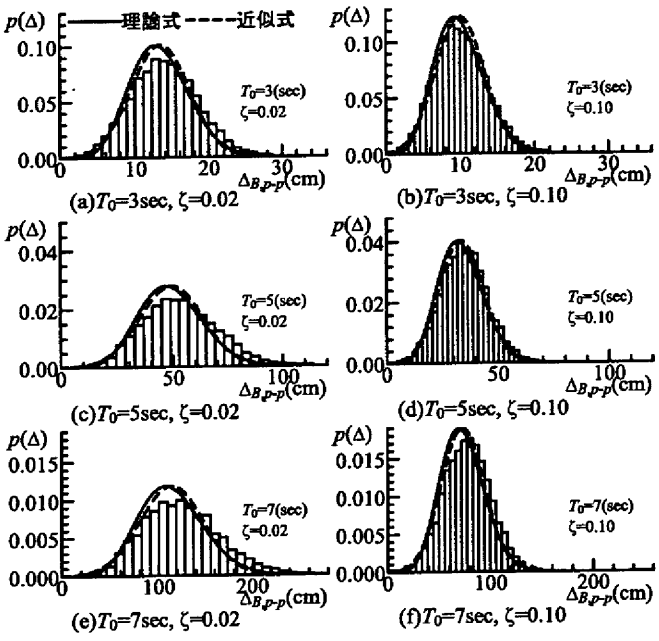
$$\sigma^2 = 2\int_0^\infty x^2 \cdot p_{x_{B,p}}(x;\sigma_{Bx},\sigma_{Rx},\varepsilon)dx - \frac{\mu^2}{2}$$

近似式は (13) 式による予測式および時刻歴応答解析結果とよく合っている。近似式は正規分布関数であり，実用性が高く，取り扱いやすいので，以下の検討では近似式を用いる。

共振成分については，図 14 よりゼロクロスピーク値分布の理論式は応答解析結果とほぼ完全に一致すること，図 16 よりピーク・ピーク値分布についても提案した理論式は応答解析結果とほぼ一致することが確かめられる。ピーク・ピーク値分布のうち，T_0 =3sec, ζ =0.10 のケースでやや理論式の適合度が悪くなっている。これは，共振成分と準静的成分は無相関であるものの，振動系の固有周期が短く，減衰が大きくなると，相対的に準静的成分波形の振幅が大きくなり，共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位において準静的成分の振幅が支配的となる確率が増え，共振成分と準静的成分の相関が見かけ上，高くなり，(15) 式に誤差が生じることが原因と考えられる。しかし，準静的成分の影響が大きく理論式に誤差が生じる場合は，そもそも共振成分振幅が小さく，その影響が小さいと考えられるため，ここでは準静的成分は打ち消され (15) 式が成り立つものとして扱うこととする。

以上のように，本章では減衰弾性系の広帯域ランダム応答時の応答変位を準静的成分と共振成分に分離し，それぞれが広帯域ランダ

NII-Electronic Library Service



※ε は表 1 に示す外乱の値を用いる

図 15 応答変位の準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位振幅の確率密度関数

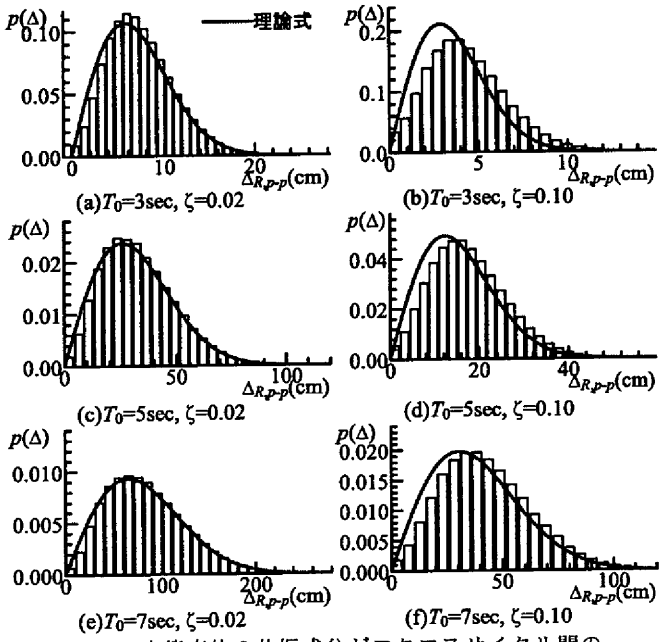


図 16 応答変位の共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位振幅の確率密度関数

ム過程の極大値分布の理論式，狭帯域ランダム応答の極大値分布の理論式 (レーリー分布) に従うことを確認し，これらを組み合わせて，準静的成分および共振成分のゼロクロスサイクル間のピーク変位とピーク・ピーク変位振幅の確率密度関数の理論式を提案した。また，提案式が時刻歴応答解析結果と概ね一致することを示し，提案式の妥当性を確認した。

提案した理論式は，準静的成分のみの外乱のパワースペクトル密度の特性を表すパラメータ ε と，準静的成分および共振成分の応答変位の標準偏差 σ_{Bx},σ_{Rx} と振動系の減衰定数 ζ のみで表される関数である。ε は変動風力の特性により求まり，また ζ は対象とする振動系の特性であるから，これらは与条件として決定し，σ_{Bx},σ_{Rx} は確率統計的手法により評価できる応答量である。したがって，提案式は，広帯域ランダム応答する減衰弾性系のゼロクロスピーク変位やピーク・ピーク変位振幅の確率密度関数を時刻歴応答解析を用いることなく評価可能な理論式であり，実用性の高いものであるといえる。

4. 弾塑性系の応答振幅の確率分布

本章では，Bi-Linear 型復元力特性を有する 1 質点弾塑性系の時刻歴風応答解析を行い，広帯域ランダム応答に対する検討を行う。既報[1),8)]は，変動風力を受け定常ランダム振動している弾塑性系のエネルギー入力や応答変位・速度は，等価線形系で代表可能であること，および応答変位の確率分布は等価線形系の確率分布をもとに上手く評価できることを示している。そこで本研究でも，弾塑性系に対応する等価線形系の応答を利用して，弾塑性系の応答変位の確率密度関数が予測可能であるかを検討する。また，提案した応答変位振幅の確率密度関数の予測手法を用いて履歴吸収エネルギーを評価し，時刻歴応答解析結果と比較することで提案手法の有効性を検討する。

4.1 時刻歴応答解析

解析モデルは 2 章で説明したモデルとし，外力は 3 章で用いたものと同じ，全長 1638.4sec の模擬風力波形を 200 波用い，評価時間 600sec の計 400 サンプルで評価を行う。構造減衰は初期剛性に対して減衰定数 ζ =0.02 とする。復元力特性は鉄骨造高層建物の履歴減衰を想定し，図 17 に示す Normal Bi-Linear 型とする。弾性時の固有周期 T_0 =5sec とし，降伏後の剛性比 (第一・第二分枝剛性の比)α，および降伏変形 δ_y を解析パラメータとする。表 3 に解析パラメータを示す。弾塑性系に対応する等価線形系のモデルは，既報[1)]と同様に，エネルギー入力と等価線形系の吸収エネルギーの釣合，及び 1 サイクルあたりのエネルギーの釣合から 1 サイクルあたりの弾塑性系のひずみエネルギーの期待値と等価線形系の弾性ひずみエネルギーが等しいという条件を与え，次式より等価剛性 k_{eq}，等価減衰定数 c_{eq} を算定して作成する。

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}Q_{pi}\cdot x_{pi}\right] / \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}x_{pi}^2\right] \tag{20}$$

$$c_{eq} = E_{input}/t_0\cdot\sigma_{\dot{x}}^2 \tag{21}$$

ここで，x_{pi}，Q_{pi}，N は共振成分ゼロクロスサイクル間の最大および最小変位点の変位 (ゼロクロスピーク変位)，せん断力および評価時間内のサイクル数。また，t_0 は評価時間，E_{input} は評価時間内の振動系へのエネルギー入力。

図 18 に解析に用いた等価線形系の等価剛性 k_{eq} と等価減衰定数 ζ_{eq} を示す。ただし，$\zeta_{eq} = c_{eq}/2\sqrt{m\cdot k_{eq}}$。弾塑性系と等価線形系の応答変位および応答速度の rms 値を図 19 に，エネルギー入力を図 20 に示す。エネルギー入力は解析結果を評価時間 (600sec) で除し，

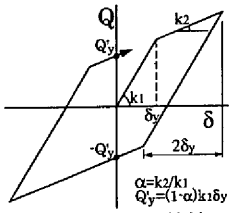
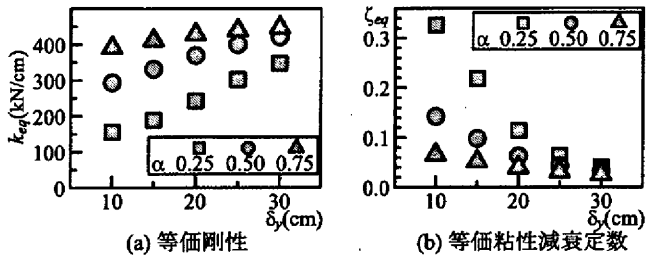


図 17 復元力特性

表 3 解析パラメータ

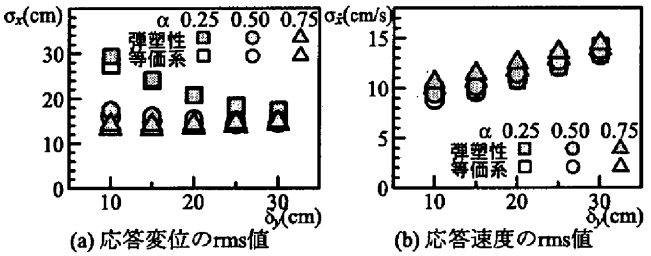
α	0.25, 0.50, 0.75
δ_y(cm)	10, 15, 20, 25, 30

NII-Electronic Library Service



(a) 等価剛性　　(b) 等価粘性減衰定数

図 18　等価線形系の等価剛性と等価減衰定数



(a) 応答変位のrms値　　(b) 応答速度のrms値

図 19　弾塑性系と等価線形系の応答変位 rms 値と応答速度 rms 値

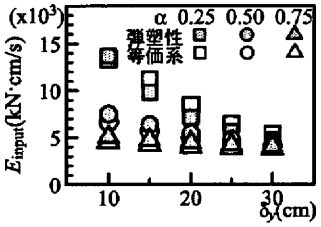


図 20　弾塑性系と等価線形系のエネルギー入力

単位時間あたりの平均値で示している。等価線形系の応答値は，いずれも弾塑性系の応答結果とよく一致しており，広帯域性の変動風力を受ける弾塑性系の応答は，(20)，(21) 式による等価線形系の応答により代表可能であることが確かめられる。

4.2 弾塑性系の応答変位確率密度関数の予測

(20) 式に示すように，弾塑性系の等価線形化には 1 サイクルあたりのひずみエネルギー等価の条件を用いているので，弾塑性系のゼロクロスピーク変位 x_i と対応する等価線形系のゼロクロスピーク変位 ${}_{eq}x_i$ の関係は次式となる。

$$\frac{1}{2}k_{eq}\cdot{}_{eq}x_i^2=\begin{cases}\frac{1}{2}k_1\cdot x_i^2 & (x_i\le\delta_y)\\ \frac{1}{2}\alpha k_1\cdot x_i^2+(1-\alpha)k_1\cdot\delta_y\cdot x_i-\frac{1}{2}(1-\alpha)k_1\cdot\delta_y^2 & (x_i>\delta_y)\end{cases}\quad(22)$$

弾塑性系のゼロクロスピーク変位 x_i の発生確率 $p(x_i)dx_i$ と対応する等価線形系のゼロクロスピーク変位 ${}_{eq}x_i$ の発生確率 $p'({}_{eq}x_i)d_{eq}x_i$ が等しいとおいて，

$$p(x_i)dx_i=p'({}_{eq}x_i)d_{eq}x_i\quad(23)$$

弾塑性系の x_i の確率密度関数は (22) 式を x_i について解き，前章で示した減衰弾性系の場合の準静的成分，共振成分それぞれのゼロクロスサイクル間のピーク変位，ピーク・ピーク変位振幅の確率密度関数を $p'({}_{eq}x_i)$ として，(23) 式に代入して求めることができる。ただし，共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位は，準静的成分により変位点付近を中心に共振成分の振幅が生じるので，見かけの等価剛性を下式で評価する。

$$k_{eq,R}=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}Q'_{pi}\cdot x'_{pi}\right]\Big/\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}x'^2_{pi}\right]\quad(24)$$

ただし，$Q'_{pi}=(Q_{pi+1}-Q_{pi})/2$

$x'_{pi}=(x_{pi+1}-x_{pi})/2$

ここで，x_{pi}, x_{pi+1}，Q_{pi}, Q_{pi+1} は共振成分ゼロクロスサイクル間の連続する (i 番目，(i+1) 番目の) 最大および最小変位点の変位 (ゼロクロスピーク変位)，せん断力および N は評価時間内のサイクル数。

図 21 に各ケースの等価剛性 $k_{eq,R}$ を示す

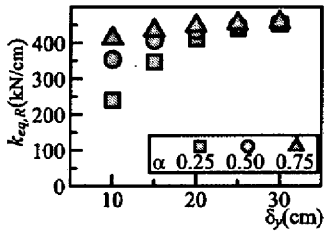


図 21　共振成分ゼロクロスピークによる等価剛性

以下に前章の (1)〜(4) に対応させて準静的成分および共振成分それぞれのゼロクロスサイクル間のピーク変位とピーク・ピーク変位の確率密度関数の評価方法を示す。

(1) 準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{B,p}$

応答変位の準静的成分波形の rms 値を与え，(10) 式により ${}_{eq}p_{x_{B,p}}(x)$ を求める。これは対応する等価線形系の確率密度関数に相当するため，記号に添字 ${}_{eq}$ をつけている。(23) 式の $p'({}_{eq}x_i)$ に ${}_{eq}p_{x_{B,p}}$, ${}_{eq}p_{x_{R,p}}$ を代入し，弾塑性系の準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位の確率密度関数 $p_{x_{B,p}}$ を得る。

(2) 共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位 $x_{R,p}$

$x_{B,p}$ と同様に，応答変位の共振成分波形の rms 値を与え，(11) 式により ${}_{eq}p_{R,p}(x)$ を求め，得られた ${}_{eq}p_{x_{R,p}}$ を (23) 式の $p'({}_{eq}x_i)$ に代入し，弾塑性系の共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位の確率密度関数 $p_{x_{R,p}}$ を得る。

(3) 準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位 $\Delta_{B,p-p}$

前章で述べたように，準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位は，中心極限定理より正規分布に収束すると考えられる。これは，弾塑性系の場合にもそれぞれが独立な確率変数であるので，成立すると予想される。そこで，前章にならい，準静的成分ゼロクロスピーク変位の確率密度関数 (弾塑性系に変換したもの) を (19) 式に代入し，正規分布を用いて準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位の確率密度関数 $p_{\Delta_{B,p-p}}$ を評価する。

(4) 共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位 $\Delta_{R,p-p}$

共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位の確率密度関数 $p_{\Delta_{R,p-p}}$ は，(18) 式に振動系の減衰 ζ として弾塑性系の等価減衰を用いて評価する。

図 22 に時刻歴応答解析結果と理論式による準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位の確率密度関数の比較を示す。(20) 式による等価剛性 k_{eq} を用いた予測式は $\alpha=0.25\sim0.50$，$\delta_y=10$cm の場合に時刻歴応答解析結果との誤差が大きいが，(24) 式による等価剛性 $k_{eq,R}$ を用いた理論値 (図中の一点鎖線) は，すべてのケースで時刻歴応答解析結果とよく合っている。なお，図中の波線で示す等

NII-Electronic Library Service

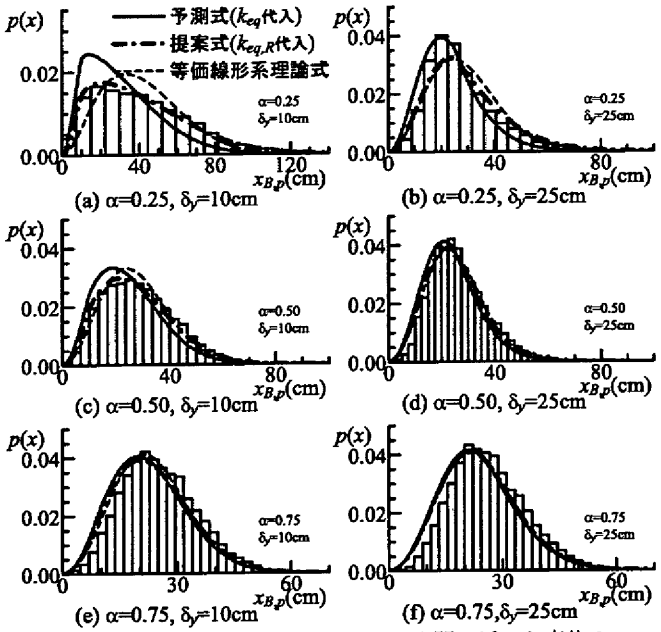


図 22 準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位の確率密度関数

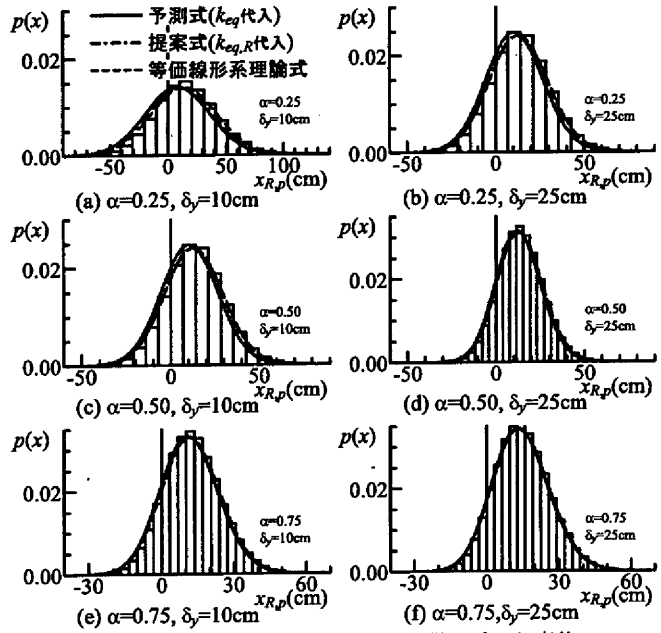


図 23 共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位の確率密度関数

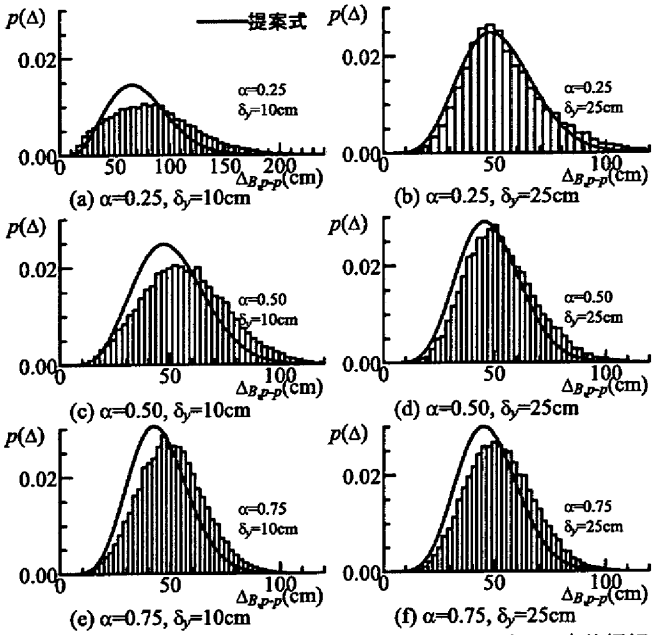


図 24 準静的成分ゼロクロスサイクル間のピークピーク変位振幅の確率密度関数

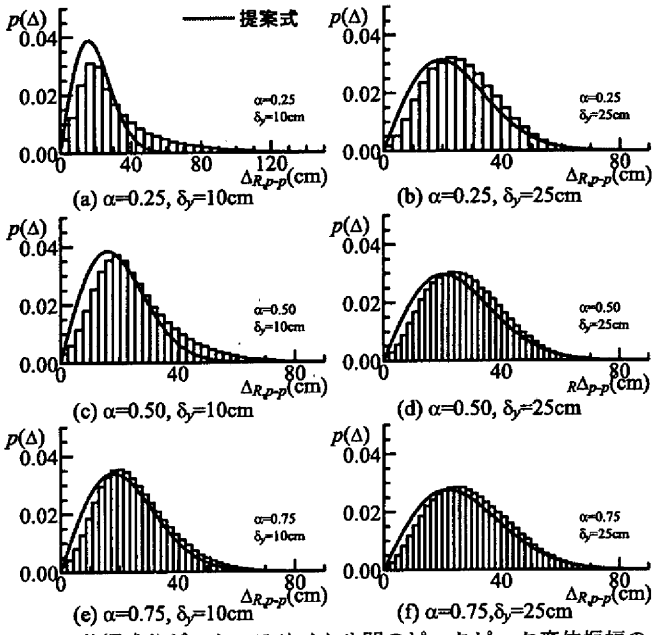


図 25 共振成分ゼロクロスサイクル間のピークピーク変位振幅の確率密度関数

価線形系理論式は応答変位の σ_{Bx} を (10) 式に代入して求めた，弾塑性系への変換前の確率密度関数 ${}_{eq}p_{x_{B,p}}$ である。図 23 に時刻歴応答解析結果と理論式による共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク変位の確率密度関数の比較を示す。確率密度関数の理論式は k_{eq}，$k_{eq,R}$ のいずれを用いても時刻歴応答解析結果とよく合っている。図中の波線で示す等価線形系理論式は応答変位の σ_{Rx} を (11) 式に代入して求めた ${}_{eq}p_{x_{R,p}}$ である。図 24 に準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位振幅の確率密度関数を示す。提案式は，やや適合度が悪い部分もあるが，全体としては時刻歴応答解析結果とよい対応を示している。図 25 に共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位振幅の確率密度関数を示す。提案式は，$\alpha \cdot \delta_y$ が小さい場合に適合度が悪くなっているが，全体としては時刻歴応答解析結果とよく合っている。$\alpha \cdot \delta_y$ が小さい場合に適合度が悪くなるのは，前章でも述べたように，塑性化の度合いが大きく，等価減衰が大きくなる影響と考えられる。

次に，提案した応答変位振幅の確率密度関数の予測式を用いて広帯域性の変動風力を受ける弾塑性系の履歴吸収エネルギーの評価を行い，時刻歴応答解析結果と比較する。

予測式には準静的成分と共振成分それぞれのゼロクロスサイクル間のピーク変位を (24) 式による $k_{eq,R}$ を用いて評価し，共振成分と準静的成分それぞれのゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位には本章の (3),(4) 項で述べた方法を適用する。図 26 に広帯域性の変動風力を受ける弾塑性系の応答変位波形と履歴ループの概念図

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

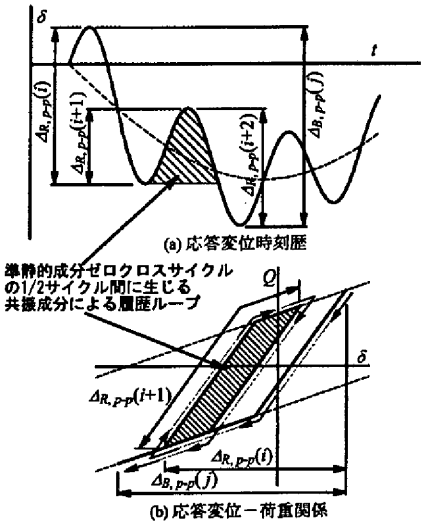


図 26　履歴吸収エネルギーに寄与する準静的成分と共振成分による変位の関係

を示す。すでに示したように，広帯域性の変動風力を受ける弾塑性系の応答は，準静的成分による周期の長い変動と共振成分による周期の短い変動の和として表現できる。図 26 は準静的成分の 1/2 サイクル間に共振成分による変動が 1 サイクル生じる様子を示している。この時，準静的成分と共振成分それぞれのゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位振幅の関係を見ると，準静的成分による変位と同じ方向となる $(i),(i+2)$ 番目の共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位には，準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位と重複する部分が生じている。よって，準静的成分と共振成分のゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位から，それらの和として履歴吸収エネルギーを評価すると，ピーク・ピーク変位の重複により履歴吸収エネルギーを過大に評価することになる。しかし，準静的成分による 1 方向の変位振幅の間の共振成分による履歴ループは，共振成分によるピーク・ピーク変位振幅 $\Delta_{R,p-p}(i)$ の直後に現れる準静的成分による変位とは逆向きのピーク・ピーク変位振幅 $\Delta_{R,p-p}(i+1)$ の大きさをもつループとなっている。ここで，$i,i+1$ 番目の $\Delta_{R,p-p}$ は次式となる。

$$\Delta_{R,p-p}(i)=|{}_R x_p(i+1)-{}_R x_p(i)| \quad \text{および}$$
$$\Delta_{R,p-p}(i+1)=|{}_R x_p(i+2)-{}_R x_p(i+1)| \tag{25}$$

k 番目の ${}_R x_p$ が生じた時，直後に生じる $k+1$ 番目の ${}_R x_p$ の期待値は，(16) 式と同様に RD 法[7]の概念を応用し次式で表わされる。

$$E[{}_R x_p(k+1)]=-\beta\cdot{}_R x_p(k) \tag{26}$$

これを (25) 式に代入すると，

$$E[\Delta_{R,p-p}(i+1)]=|-\beta\cdot{}_R x_p(i+1)+\beta\cdot{}_R x_p(i)|$$
$$=\beta\cdot\Delta_{R,p-p}(i) \tag{27}$$

したがって履歴吸収エネルギーの単位時間当たりの期待値 $\overline{W_p}$ は，準静的成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位 $\Delta_{B,p-p}$ と，$\Delta_{B,p-p}$ によるループと重複しない共振成分による履歴ループとして，共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位 $\Delta_{R,p-p}$ に対して $\beta\cdot\Delta_{R,p-p}$ から，それぞれの塑性変形を評価して，次式で表すことができる。

$$\overline{W_p}=\nu_B\cdot{}_{1\cdot B}W_p+\nu_R\cdot{}_{1\cdot R}W_p \tag{28}$$
$${}_{1\cdot B}W_p=2Q'_y\cdot\int_{2\delta_y}^{\infty}\left(p_{\Delta_{B,p-p}}(x)\cdot x-2\delta_y\right)dx \tag{29}$$
$${}_{1\cdot R}W_p=2Q'_y\cdot\int_{2\delta_y/\beta}^{\infty}\left(p_{\Delta_{R,p-p}}(x)\cdot\beta\cdot x-2\delta_y\right)dx \tag{30}$$

ただし，$Q'_y=(1-\alpha)k_1\delta_y$。また，${}_{1\cdot B}W_p$, ${}_{1\cdot R}W_p$ は準静的成分または共振成分ゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位による 1 サイクルあたりの履歴吸収エネルギーの期待値，ν_B,ν_R は準静的成分および共振成分ゼロクロッシング数。

図 27 に準静的成分と共振成分それぞれのゼロクロスサイクル間のピーク・ピーク変位の確率密度関数の予測式を用いて評価した履歴吸収エネルギーを時刻歴応答解析結果と比較して示す。なお，ν_B,ν_R は時刻歴応答解析結果による準静的成分，共振成分それぞれのゼロクロッシング数を用いた。図 27 から，時刻歴応答解析結果と応答解析結果の振幅の確率密度関数から (28) 式により評価した履歴吸収エネルギーはよく対応しており，(28) 式による評価が妥当であることが確かめられる。また，準静的成分・共振成分のピーク・ピーク変位振幅の確率密度関数の提案式から (28) 式により評価した履歴吸収エネルギーは，時刻歴応答解析結果と良く対応しており，提案式の妥当性が示された。

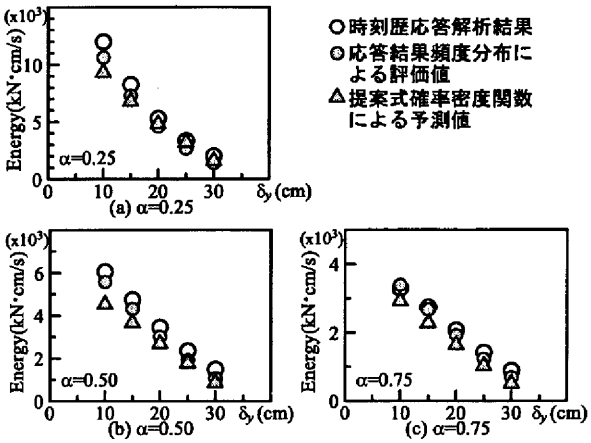


図 27　ピークピーク変位振幅の確率密度関数による履歴吸収エネルギーの予測

5. 結び

定常ランダム振動の極値分布の理論解を基に，平均値がゼロの広帯域性の変動風力を受ける弾塑性系の応答変位振幅の確率密度関数を導き，その有効性について検討を行い，以下の結論を得た。

1. 広帯域ランダム応答する減衰弾性系の応答変位を準静的成分と共振成分に分離し，広帯域・狭帯域ランダム過程の極大値分布の理論式を基に準静的成分および共振成分のゼロクロスサイクル間の最大値分布 (ゼロクロスピーク値分布) とピーク・ピーク値分布の確率密度関数の理論式を提案した。また，提案式が時刻歴応答解析結果と概ね一致することを示し，提案式の妥当性を確認した。
2. 減衰弾性系の応答変位の確率密度関数の予測式を弾塑性系に拡張し，提案式が時刻歴応答解析結果と概ね一致することを示した。

NII-Electronic Library Service

Architectural Institute of Japan

3. 提案した予測式を用いて，広帯域性の変動風力を受ける1質点弾塑性系の履歴吸収エネルギーの評価を行い，予測値が時刻歴応答解析結果とよく一致することを示し，提案手法の有効性を確認した。

提案した理論式は，外乱のパワースペクトル密度と，準静的成分および共振成分の応答変位の標準偏差と振動系の構造特性のみで表される関数であり，広帯域ランダム応答する構造物のゼロクロスピーク値分布やピーク・ピーク値分布を時刻歴応答解析を用いることなく評価可能な理論式であり，実用性の高いものであると考える。

参考文献

1) 吉江慶祐, 北村春幸, 大熊武司: エネルギーの釣合に基づく変動風力を受ける弾塑性構造物の応答予測手法, 日本建築学会構造系論文集, 第589号, pp. 59–66, 2005.3
2) S.H. Crandall, W.D. Mark, 岡村秀勇訳: 機械技術者のためのランダム振動, コロナ社, 1975
3) 岡内功, 伊藤學, 宮田利雄: 耐風構造, 丸善株式会社, 1977
4) 辻田修, 早部安弘, 大熊武司, 和田章: 弾塑性構造物の風応答性状ならびにその予測手法に関する研究 その2 風方向振動の場合, 日本建築学会構造系論文集, 第485号, pp. 25–34, 1996.7
5) 日本建築学会: 建築物荷重指針・同解説 (2004), 2004
6) 星谷勝: 確率論手法による構造解析, 鹿島出版会, 1973
7) 田村幸雄, 佐々木淳, 塚越治夫: RD法による構造物のランダム振動時の減衰評価, 日本建築学会構造系論文報告集, 第454号, pp. 29–38, 1993.12
8) 吉江慶祐, 北村春幸, 大熊武司: 変動風力による弾塑性構造物への総エネルギー入力に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第572号, pp. 31–38, 2003.10

(2005年10月10日原稿受理，2006年2月9日採用決定)

NII-Electronic Library Service